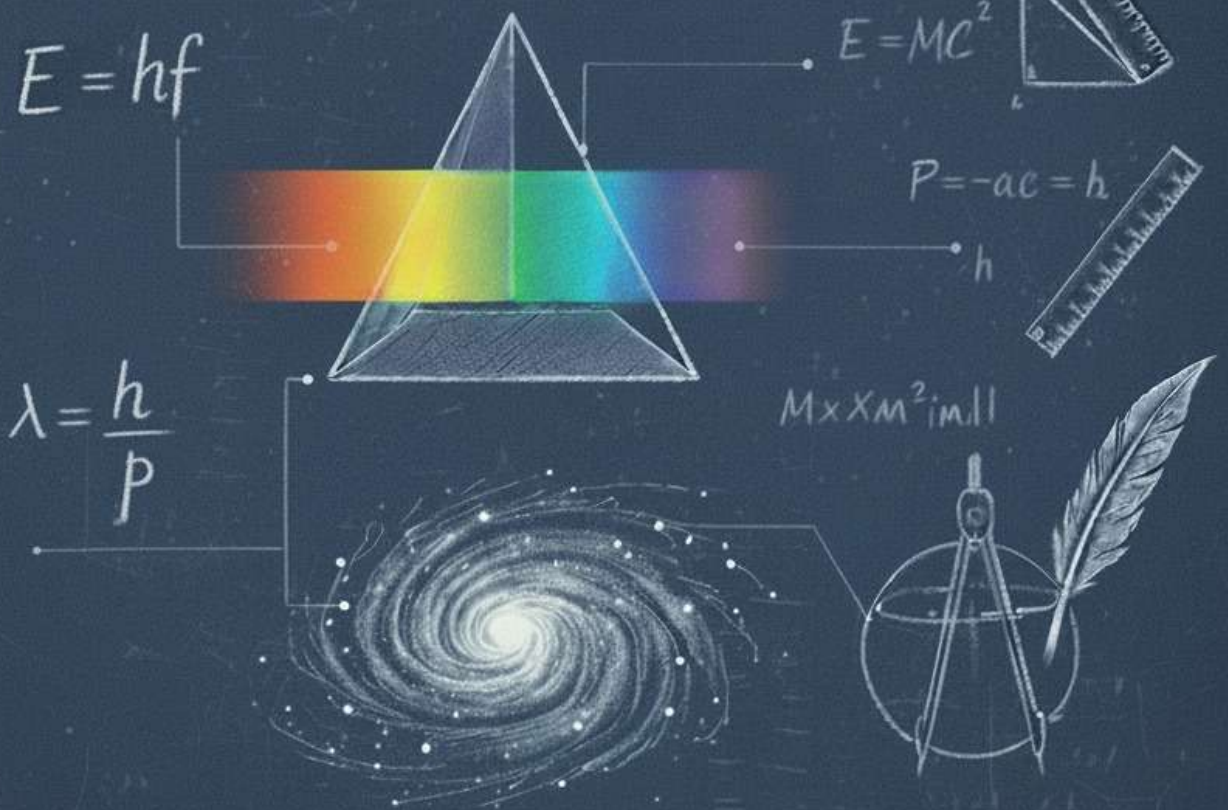


Giancarlo Buccella

SPIGOLATURE di FISICA

Articoli vari sul mondo fisico



Giancarlo Buccella

Spigolature di fisica

Articoli vari sul mondo della fisica

.

Sommario

1	Alcuni cenni sulla propagazione degli errori	Pag. 1
2	Moto in presenza di forze viscosse	Pag. 18
3	Appunti sulla legge gravitazionale	Pag. 59
4	Tempo di caduta di un corpo in un campo centrale	Pag. 79
5	Teoria classica del corpo nero	Pag. 99
6	A proposito della trasmissione del calore (tempo di raffreddamento di una birretta)	Pag. 139
7	Bilancio termico terrestre ed effetto serra	Pag. 174
8	Bilancio energetico del corpo umano	Pag. 189
9	Perché in estate fa più caldo che in inverno	Pag. 244
10	Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale	Pag. 249
11	Il fenomeno delle maree	Pag. 256
12	Problema delle formiche che si inseguono	Pag. 268

Alcuni cenni sulla propagazione degli errori (o incertezze)

a cura di Giancarlo Buccella

La misura esatta di una grandezza fisica è un dato teorico sperimentalmente inaccessibile.

Ogni misura porta con sé inevitabilmente un certa incertezza, che nel caso di una misura singola corrisponde alla sensibilità dello strumento utilizzato per effettuare la misura, cioè alla minima variazione della grandezza che lo strumento riesce a rilevare. Un esempio per tutti è il seguente: se sopra una bilancia poniamo un oggetto di un peso inferiore alla sensibilità minima la lancetta non si sposterà dallo zero, la sensibilità sarà il peso minimo che la bilancia riesce a rilevare.

Facendo, ad esempio, una misura di lunghezza con un metro da sarto, che ha una sensibilità del millimetro, l'incertezza da associare alla misura sarà di 1 mm o se si è particolarmente attenti nella misura ci si potrebbe spingere alla metà della sensibilità ossia 0.5 mm, ma certamente non oltre.

In questa nota useremo come sinonimi le parole incertezza ed errore.

Misura diretta

Nel caso di una misura diretta di una singola grandezza fisica il risultato si scrive così:

$$(x \pm \Delta x) u$$

Dove u sta per 'unità di misura' e dipende dalla unità di misura adottata per la grandezza misurata, e il Δx rappresenta l'incertezza sulla misura, che in questo caso coincide alla sensibilità dello strumento (o tutt'al più alla sua metà). Per semplicità nel seguito ometteremo di scrivere le unità di misura.

Il valore numerico di Δx definisce il numero di cifre significative con cui ha senso esprimere x .

Vale la seguente regola:

la posizione decimale dell'ultima cifra diversa da zero deve essere la stessa sia nel valore della misura (x) che nell'incertezza (Δx).

Ad esempio, se il valore della misura è 186.77 cm con un'incertezza di 0.3 cm è errato scrivere 186.77 ± 0.3 dato che la posizione della cifra dell'incertezza è sui decimi anche il numero che esprime la misura dovrà fermarsi (cioè avere una cifra diversa da zero) ai decimi, e quindi andrà scritto così 186.8 ± 0.3 , se invece l'incertezza sarebbe 3 allora si dovrebbe scrivere 187 ± 3 , se ancora l'incertezza sarebbe 30 (ossia nelle decine) il risultato della misura dovrà avere cifre diverse da zero fino alle decine, e quindi si avrebbe non 187 ± 30 ma 190 ± 30 .

Misure ripetute

Per effettuare la misura di una grandezza, abbiamo bisogno di uno strumento di misura. È impossibile ottenere il valore esatto di una grandezza, perché ogni misura è soggetta a tre tipi di imprecisione di cui la prima riguarda solamente il caso della misura singola.

1. la sensibilità dello strumento di misura, cioè la grandezza più piccola che posso misurare.

Esempio: con un normale righello la divisione più piccola corrisponde a 1 mm. Perciò non possiamo misurare lunghezze più piccole di 1 mm e ogni misura ha un'incertezza pari 1 mm (o al più della mezza "tacca", cioè 0.5 mm).

2. l'errore casuale, causato da piccole e imprevedibili variazioni, che aumentano e diminuiscono di poco il risultato della misura.

Esempio: quando cronometriamo una corsa di velocità, la prontezza di riflessi aumenta o diminuisce casualmente, anche se di poco, e questo introduce una variabilità casuale dei risultati che misuriamo.

3. l'errore sistematico è causato da un difetto dello strumento di misura o del metodo utilizzato, e si ripete identico ad ogni misura.

Esempio: un orologio che va troppo piano o una bilancia tarata male modificano sistematicamente le misure.

Nel seguito **non terremo conto dell'errore sistematico** in quanto esso qualora si presenti è in genere facilmente identificabile ed eliminabile da un bravo operatore.

Al fine di fare misure più accurate è conveniente ripetere l'operazione di misura più volte, infatti in questo modo si ottiene un valore dell'incertezza più piccolo rispetto a quello ottenuto facendo una sola misura. Facendo N misure di una data grandezza x , si ottengono N risultati non tutti uguali fra loro, quindi è solo possibile dire che la nostra misura sarà compresa fra il valore massimo e minimo fra quelli ottenuti.

E' chiaro che nel caso in cui la sensibilità dello strumento maschera l'effetto degli errori casuali otterremo sempre lo stesso valore della misura, ad esempio se misuriamo la lunghezza di un tavolo con il metro di casa otterremo sempre lo stesso valore.

Quindi facendo N misure otterremo in generale N valori : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$.

Fra questi valori ci sarà quello massimo x_{\max} e quello minimo x_{\min} . Si definisce il valore più probabile (ossia il numero rappresentativo delle n misure, da scrivere come risultato della misura, che indicheremo con il simbolo \bar{x}) la media aritmetica dei valori ottenuti associando a questo valore una incertezza data dalla semidispersione Δx .

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N}{N}$$

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Il risultato risulterà espresso nel seguente modo

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

dove Δx viene detto incertezza assoluta (o errore assoluto).

Regola: Il valore fornito dall'incertezza deve essere espresso con una sola cifra diversa da zero;

ad esempio se il calcolo ci dà 0.0341 l'incertezza va espresso come 0.03, se invece il risultato è 93.2 si dovrà scrivere 90.

Eccezione: se la prima cifra dell'incertezza è 1 (o eventualmente 2) per non essere troppo brutali nell'approssimazione si potrebbe conservare due cifre anziché una soltanto. Ad esempio se $\Delta x = 0.138$ si potrebbe scrivere 0.14 anziché 0.1.

Oltre alla semidispersione ci sono altre modalità di calcolo per determinare l'errore.

Errore relativo

Si possono avere misure con lo stesso errore assoluto ma precisione molto diversa. Ad esempio, se misuriamo la lunghezza del pollice della mano (circa 2 cm) e facciamo un errore di 1 cm, abbiamo così una misura molto grossolana. Ma se facciamo lo stesso errore di 1 cm nel misurare l'altezza del Colosseo (circa 50 m), avremo una misura molto più precisa. Eppure, l'errore assoluto è identico. Per avere una indicazione della precisione della misura si introduce l'incertezza relativa definita come rapporto fra l'incertezza ed il valore della misura

$$\Delta_{rel} x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

A volte è utile esprimere tale numero percentualmente e si parla allora di incertezza percentuale:

L'**errore percentuale** è pari all'errore relativo moltiplicato per 100, e si indica con il segno %.

Ad esempio se la lunghezza di un pollice è di 2 cm e l'errore di misura è di 1 cm, l'errore relativo vale

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\% \quad (\text{errore è di una parte su 2})$$

Nel caso invece della misura dell'altezza del Colosseo avremo

$$\Delta_{rel} L = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{5000} = 0.0002 = 0.02\% \quad (\text{errore di una parte su 5000})$$

Diremo perciò che la seconda misura è molto più precisa della prima.

Misure indirette - Propagazione degli errori

Quando siamo di fronte a dover **misurare delle grandezze derivate**, ossia quelle grandezze che si definiscono a partire dalle sette grandezze fondamentali che si ottengono moltiplicando o dividendo, tra loro due o più grandezze fondamentali, ci si pone il problema di capire quale errore associare alla **misura** che non sarà più una misura diretta ma **indiretta**. Ricordiamo che una **misura diretta si ottiene confrontando direttamente l'oggetto da misurare con la relativa unità di misura**. Se ad esempio volessimo misurare l'area di un pavimento quadrato, con una misura diretta dovremo dotarci di una unità di area (ad esempio un foglio A4) e vedere quante volte il foglio "ci stà" su tutto il pavimento, ovviamente un modo impraticabile quindi si ricorre alla misura indiretta, ci occorrerà fare solo una misura di lunghezza (grandezza fondamentale) e poi per calcolare l'area dovremo semplicemente elevare al quadrato tale valore: $A = L^2$. Si pone allora il seguente problema: che errore associare alla misura?

Somma e differenza

Siano A e B due grandezze omogenee,

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{somma} & C = (a + b) \pm (\Delta a + \Delta b) \\ \text{differenza} & C = (a - b) \pm (\Delta a + \Delta b) \end{array}$$

L'errore assoluto e relativo di una somma o differenza fra due o più grandezze omogenee è:

$$\Delta C = \Delta a + \Delta b$$
$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b}$$

Prodotto e divisione

Siano A e B due grandezze omogenee,

$$\begin{cases} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{prodotto} & C = (a \cdot b) \pm (b\Delta a + a\Delta b) \\ \text{quoziente} & C = (a / b) \pm ((b\Delta a + a\Delta b) / b^2) \end{array}$$

L'errore assoluto e relativo di un prodotto e un quoziente fra due o più grandezze omogenee è:

$$\Delta C = (ab) \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right); \quad \Delta C = (a/b) \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$
$$\frac{\Delta C}{C} = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \right) \text{ in ambedue i casi.}$$

Quindi, generalizzando possiamo dire che:

l'errore relativo associato a una grandezza fisica che è il risultato del **prodotto, o del quoziente** o di una combinazione di essi, fra due o più grandezze, ciascuna misurata con la propria incertezza, si ottiene **sommando gli errori relativi** delle singole grandezze.

Potenza

Si tratta di un caso particolare del prodotto in quanto si sta moltiplicando per se stesso un numero n volte. L'errore relativo associato al risultato di un'operazione di potenza è dato da n volte l'errore relativo della base della potenza.

Data la grandezza $C = a^n$ si ha

Errore assoluto e relativo: $\Delta C = a^n n \frac{\Delta a}{a}; \quad \frac{\Delta C}{C} = n \frac{\Delta a}{a}$

Prodotto per una costante

Consideriamo adesso il caso in cui la grandezza di cui vogliamo stimare l'errore sia il risultato del prodotto di un'altra grandezza che misuriamo con una costante priva di indeterminazione. Sia cioè:

$$C = k b, \quad \text{con } k \text{ costante.}$$

Utilizzando la regola del prodotto si ha come errore relativo

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta b}{b}$$

siccome la costante k non ha incertezza si ha:

$$\Delta C = k \Delta b$$

L'incertezza assoluta è in questo caso pari a k volte il valore dell'incertezza della misura.

Es: Consideriamo la lunghezza di una circonferenza di cui misuriamo il raggio $r = 51.3 \pm 0.2$ m, si ha

$$C = 2 \pi r \pm \Delta C = 322.164 \pm \Delta C$$

l'errore è $\Delta C = 2\pi \Delta r = 2\pi \cdot 0.2 = 1.256$ quindi scriveremo

$$C = 322.164 \pm 1.256 \quad \text{cioè}$$

$$C = (322 \pm 1) \text{ m}$$

Come si vede se il valore della costante ha fatto passare il valore dell'incertezza da 0.2 ad 1!

Precisione e accuratezza

I termini precisione e accuratezza sono messi in relazione con gli errori casuali e sistematici. Una misura è tanto più precisa quanto più i singoli valori misurati in condizioni di ripetibilità si concentrano intorno alla media della serie di misure effettuate. Il concetto di precisione è qualitativo. La variabilità dei risultati viene quantificata, come di consueto, nella deviazione standard σ ma questa di per sé non è atta a quantificare la precisione della misura secondo il significato usuale del termine di "qualità della misura". Ad esempio una deviazione standard di 1 mm rappresenta ottima o pessima precisione a seconda che si stiano misurando lunghezze della decina di metri o inferiori al centimetro. Si preferisce quantificare la precisione con il modulo del coefficiente di variazione ossia come

$$\frac{\sigma}{\bar{x}}$$

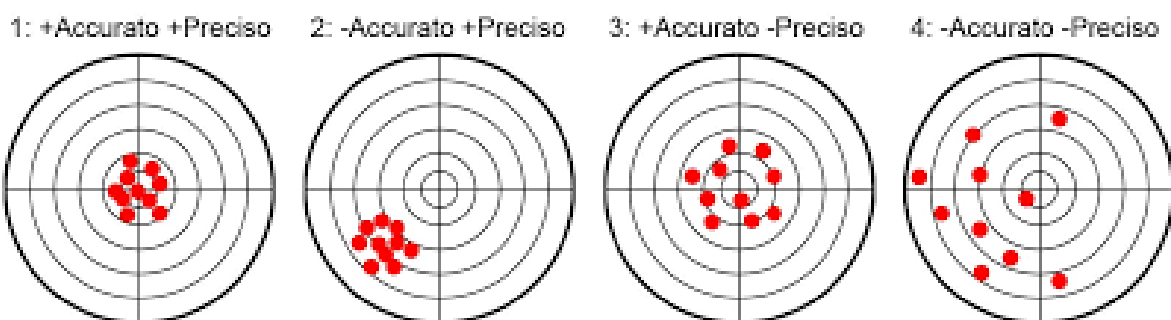
in genere espresso in percentuale. Una deviazione standard di 1 mm su una misura di 10 cm corrisponde ad una precisione dell'1%, mentre lo stesso errore su una misura di 1 cm corrisponde ad un errore relativo percentuale (precisione) del 10%.

Con il termine precisione si fa riferimento a quanto possano essere ripetibili o quanto possano essere vicini tra loro i risultati ottenuti. Da uno strumento di misura preciso, infatti, si otterrà lo stesso risultato per la maggior parte delle volte in cui verrà utilizzato. La precisione, dunque, permette di verificare l'affidabilità e la coerenza di uno strumento.

L'accuratezza esprime invece l'assenza di errori sistematici nella misura: una misura è tanto più accurata quanto più la media delle misure si approssima al valore vero della grandezza. La presenza d'errori costanti che "spostano" le letture reali dal valore vero, indicano dunque l'esistenza di *errori sistematici*.

L'**accuratezza** di uno **strumento di misura** indica quanto il risultato della misura di una grandezza, si avvicina al **valore vero**, ossia indica la concordanza fra la media ed il valore vero.

L'accuratezza indica quanto una misura vicina è al valore accettato. Ad esempio, ci aspettiamo che una bilancia legga 100 grammi se poniamo un peso standard di 100 grammi su di essa. In caso contrario, la bilancia non è accurata.



Esercizi

Esercizio n. 1

Per il volume di una bombola è stato trovato il valore (30.18 ± 0.04) L. Qual è il volume complessivo di 12 bombole identiche?

L'incertezza sulle 12 bombole è 12 volte l'incertezza su una singola bombola $\Delta V = 12 \cdot 0.04 = 0.48 = 0.5$ L

Il volume totale è $30.18 \cdot 12 = 362.16$ L. Quindi la risposta è 362.2 ± 0.5

Esercizio n. 2

Il peso di un foglio di carta di area 1 m^2 è stato valutato come (80.4 ± 0.7) g. Che cosa si può dire del peso di 1 cm^2 di quella carta?

Dato che $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ il valore più probabile del peso di 1 cm^2 sarà $80.4 \cdot 10^{-4}$ g con incertezza $0.7 \cdot 10^{-4}$ g

Esercizio n. 3

Il peso di un secchio vuoto è (1.44 ± 0.03) kg. Il peso dello stesso secchio pieno di acqua è (12.38 ± 0.06) kg. Qual è il peso dell'acqua nel secchio?

Il peso dell'acqua è $12.38 - 1.44 = 10.94$ kg. L'incertezza è la somma delle incertezze: $0.03 + 0.06 = 0.09$ kg. L'acqua contenuta nel secchio pesa quindi (10.94 ± 0.09) kg.

Esercizio n. 4

Sapendo che il diametro di una sfera è $d = (14.46 \pm 0.16)$ cm, se ne deduca la misura del volume.

Il raggio è la metà del diametro $d = 2R$

$$R = \frac{1}{2} d = 14.46 / 2 = 7.23 \text{ cm};$$

L'incertezza assoluta sul raggio è: $\Delta R = \frac{1}{2} \Delta d = 0.16 / 2 = 0.08 \text{ cm}$: $R = (7.23 \pm 0.08) \text{ cm}$

Il volume della sfera è

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 7.23^3 = 1582 \text{ cm}^3$$

L'errore sul volume è

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi \Delta(R^3) = 4.14 \Delta(R^3) = 4.14 \cdot (3 \cdot R^2 \frac{\Delta R}{R}) = 12.14 \cdot 7.23^2 \cdot \frac{0.08}{7.23} = 50.76 \text{ cm}^3$$

$$V = 1580 \pm 50 \text{ cm}^3$$

Oppure si poteva fare nel seguente modo

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 = \frac{\pi}{6} \cdot 14.46^3 = 1582 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{6} \Delta(D^3) = 0.523 \cdot 3 \cdot D^2 \frac{\Delta D}{D} = 1.57 \cdot 14.46^2 \cdot \frac{0.16}{14.46} = 52.5 \text{ cm}^3$$

$$V = 1580 \pm 50 \text{ cm}^3$$

Esercizio n. 5

Supponendo che il valore del diametro di una sfera sia $D = 10 \text{ cm}$, con quale incertezza dovrebbe essere dato tale valore per avere un'area della superficie sferica avente incertezza di 1 cm^2 ?

L'area della superficie sferica è $A = 4\pi R^2 = \pi D^2$

Se l'incertezza su A deve essere di 1 cm^2 significa scrivere $\Delta A = \pi \Delta(D^2) = 1 \text{ cm}^2$

l'incertezza su D vale $\Delta(D^2) = D^2 2 \frac{\Delta D}{D} = 2 D \Delta D = 2 \cdot 10 \Delta D = 20 \Delta D$

$$\Delta A = \pi \cdot 20 \cdot \Delta D = 1 \text{ cm}^2 \quad \text{quindi} \quad \Delta D = \frac{\Delta A}{20\pi} = \frac{1}{20\pi} = 0.02 \text{ cm}$$

Esercizio n. 6

Si determini la misura dell'ipotenusa c di un triangolo rettangolo aventi cateti a e b (tralasciando le unità di misura):

$$a = 102.3 \pm 0.6$$

$$b = 48.6 \pm 0.3$$

$$\text{L'ipotenusa vale } c^2 = (a^2 + b^2)^{1/2} = (102.3^2 + 48.6^2) = 12827.25; \quad \mathbf{c = 113.25}$$

Svolgimento n. 1

Calcoliamo gli errori degli addendi usando la formula per le potenze,

$$\Delta(a^2) = 2 \cdot a^2 \frac{\Delta a}{a} = 2 \cdot 102.3^2 \frac{0.6}{102.3} = 122.76 \rightarrow 100$$

$$\Delta(b^2) = 2 \cdot b^2 \frac{\Delta b}{b} = 2 \cdot 48.6^2 \frac{0.3}{48.6} = 29.16 \rightarrow 30$$

Vale la seguente uguaglianza

$$\Delta(c^2) = \Delta(a^2) + \Delta(b^2) = 100 + 30 = 130 \rightarrow 100$$

Da cui possiamo scrivere $c^2 = 12827.25 \pm 100 = 12900 \pm 100$

Ma a noi interessa c e non c^2 .

$$\Delta(c^2) = 2c^2 \frac{\Delta c}{c} = 2c\Delta c = 130; \quad \Delta c = \frac{130}{2c} = \frac{130}{2 \cdot 113.25} = 0.57 \rightarrow 0.6$$

Se invece avessimo usato il valore approssimato dell'errore su c^2 (100) avremmo avuto

$$\Delta c = 0.4$$

In definitiva il risultato con questo approccio è **$c = 113.3 \pm 0.6$**

Svolgimento n. 2

Si può fare più velocemente calcolando direttamente l'errore di c scrivendolo nel seguente modo

$$c = (c^2)^{1/2}$$

$$\Delta c = \frac{1}{2} (c^2)^{1/2} \frac{\Delta(c^2)}{c^2} = \frac{1}{2} c \frac{\Delta(c^2)}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(c^2) + \Delta(b^2)}{c} = \frac{1}{2} \frac{100 + 30}{113.25} = 0.57 \rightarrow 0.6$$

Quindi **$c = 113.3 \pm 0.6$**

Svolgimento n. 3

Si poteva fare anche usando un ragionamento sui valori estremi di c , avendosi

$$c_{\max} = \sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2} = \sqrt{(102.3 + 0.6)^2 + (48.6 + 0.3)^2} = 113.98$$

$$c_{\min} = \sqrt{(a - \Delta a)^2 + (b - \Delta b)^2} = \sqrt{(102.3 - 0.6)^2 + (48.6 - 0.3)^2} = 112.59$$

Il cui valor medio è

$$c_{medio} = \frac{c_{max} + c_{min}}{2} = 113.3$$

$$\Delta c = \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = 0.67 \rightarrow 0.7$$

Con semidispersione pari a

Avendo il seguente risultato finale

$$\mathbf{c = 113.3 \pm 0.7}$$

Per concludere vediamo come usando la relazione generale della propagazione degli errori si ha lo stesso risultato:

$$\begin{aligned}\Delta c &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial b} \Delta b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Delta b\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{102.3}{\sqrt{102.3^2 + 48.6^2}} 0.6\right)^2 + \left(\frac{48.6}{\sqrt{102.3^2 + 48.6^2}} 0.3\right)^2} = 0.6\end{aligned}$$

La deviazione standard e suo significato statistico

Se si fanno delle misure ripetute, diciamo N misure, allora nella teoria degli errori si dimostra che la migliore stima del valore vero della misura della grandezza X della misura è la media aritmetica dei risultati

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_N}{N}$$

Al valore della misura va associato lo **scarto quadratico medio (o deviazione standard)**

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Il cui significato statistico è il seguente: se si ripete una misura, la **probabilità che essa cada dentro l'intervallo di confidenza $x \pm \sigma$ è del 68%**, del **95%** entro **$x \pm 2\sigma$** e del **99%** entro **$x \pm 3\sigma$** .

Una scoperta scientifica per essere accettata dalla comunità internazionale deve avere una significatività di 5σ (detta "Gold Standard"). E' chiaro però che si tratta di una soglia convenzionale.

Il termine "*standard deviation*" è stato introdotto in statistica da Pearson nel 1894 assieme alla lettera greca σ (sigma) che lo rappresenta. Il termine italiano "deviazione standard" ne è la traduzione più utilizzata nel linguaggio comune; il termine dell'Ente Nazionale Italiano di Unificazione è tuttavia "scarto tipo". A partire dallo scarto quadratico medio si definisce anche il coefficiente di variazione o la deviazione standard relativa come il rapporto tra lo scarto tipo e il valore assoluto della media aritmetica della variabile in esame sempreché quella media sia non nulla:

$$\sigma_{x,rel} = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

Questo indice relativo (che viene spesso espresso in termini percentuali e consente di effettuare confronti sulla precisione di misure diverse, indipendentemente dalle loro quantità assolute.

La deviazione standard dalla media

La deviazione standard, calcolata su un gruppo di N misure, assolve bene il compito di incertezza da associare alla singola misura della grandezza in esame, mentre per quello che riguarda **l'incertezza sulla media** si ricorre ad un'altra grandezza ancor più idonea allo scopo. Tale grandezza è la **deviazione standard della media** ed è definita come

$$\sigma_{x,media} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Purtuttavia la teoria mostra che si può utilizzare questa formula anche per un singolo set di misure. Utilizzando questa nuova grandezza come incertezza da associare alla media di N misure. Così facendo si è supposto che le singole misure effettuate si siano distribuite seguendo la distribuzione di Gauss (assunto peraltro assai fondato) e di conseguenza abbiamo considerato la deviazione standard più come incertezza sulle singole misure che sulla media di quest'ultime.

C'è un'ultima **raffinatezza** della teoria che introduce un meno uno al denominatore della deviazione standard (dovuto al fatto che una singola misura x_i viene usata due volte al numeratore (una volta come singola misura ed un'altra come "membro" della media) che diventa quindi

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

In definitiva la formula della **deviazione standard dalla media da usare** per la stima di una misura, ripetuta N volte è

$$\sigma_{x,media} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

Questa è la formula corretta da usare in tutti i casi in cui la distribuzione degli errori segua una distribuzione gaussiana.

N.B.

E' chiaro che per N sufficientemente grande il meno uno al denominatore è del tutto influente e va bene anche usare la relazione

$$\sigma_{x,media} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{N} \quad (se \ N \gg 1)$$

La somma quadratica degli errori (somma in quadratura)

Abbiamo visto che nel caso in cui le **grandezze misurate direttamente si debbano sommare**, allora possiamo stimare l'errore sul risultato come la **somma dei singoli errori assoluti**, mentre quando si procede a delle **moltiplicazioni o a delle divisioni** sono i **singoli errori relativi a venire sommati**.

In questa sezione vedremo come, sotto certe condizioni, le incertezze calcolate utilizzando le suddette regole possano essere più grandi del necessario: costituiscano cioè una sovrastima. Le condizioni affinché si possa applicare la somma quadratica sono fondamentalmente due e riguardano entrambe gli errori sulle grandezze originarie: questi devono essere

- indipendenti
- casuali

In questo modo le misure iniziali si possono considerare governate da una distribuzione normale (gaussiana): essendo inoltre indipendenti la composizione di due o più distribuzioni da luogo ad una distribuzione nuovamente di tipo normale e con deviazione standard pari alla radice quadrata della somma dei quadrati delle deviazioni standard iniziali.

Vediamo di chiarire questo concetto apparentemente complicato.

Supponiamo di avere misurato le due quantità x e y

$$x_m \pm \Delta x$$

$$y_m \pm \Delta y$$

e che queste soddisfino i requisiti che abbiamo illustrato: allora se supponiamo che esse siano governate da due distribuzioni normali di centro rispettivamente X e Y e deviazione standard σ_x e σ_y possiamo sostituire ai loro errori assoluti (Δx e Δy) le rispettive deviazioni standard.

Ora la probabilità di ottenere un particolare valore di x e di y è

$$P(x) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); P(y) \propto \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

dove abbiamo posto momentaneamente i valori X e Y uguali a zero per semplicità di calcolo. Dal momento che sia x che y sono misurati indipendentemente l'uno dall'altro, la probabilità di ottenere un particolare valore di x e contemporaneamente un particolare valore di y è data dal prodotto delle singole probabilità per cui si ha

$$P(x, y) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

A questo punto, applicando alcune proprietà matematiche che qui non riportiamo, si può vedere che la

probabilità di ottenere un dato valore $z = x + y$ ha la seguente forma

$$P(x + y) \propto \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right]$$

Questo risultato mostra che i valori di $z = x + y$ sono normalmente distribuiti attorno all'origine con deviazione standard pari a

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Se invece di considerare X e Y entrambe nulli li valutiamo con il loro valore reale, giungiamo alla medesima conclusione salvo il fatto che z sarà non più distribuita rispetto all'origine, ma rispetto alla quantità $X + Y$

Enunciato:

Se diverse grandezze x, y, \dots, w sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" $\Delta x, \Delta y, \Delta x, \dots \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = x + \dots + y - (u + \dots + w)$$

allora l'errore su z è la somma quadratica degli errori originari.

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots + \sigma_w^2}$$

In ogni caso, l'errore σ_z su z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori originali

$$\sigma_z \leq \sigma_x + \sigma_y + \dots + \sigma_w$$

Si dimostra che vale anche il seguente enunciato.

Se diverse grandezze x, y, \dots, w sono misurate con incertezze "indipendenti e casuali" $\Delta x, \Delta y, \Delta x, \dots \Delta w$ e tali valori vengono utilizzati per calcolare quantità del tipo

$$z = \frac{x \cdot \dots \cdot z}{u \cdot \dots \cdot w}$$

allora l'errore su z è la somma quadratica dei singoli errori relativi degli errori originari.

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta w}{w}\right)^2}$$

In ogni caso, l'errore relativo di z non è mai più grande della somma ordinaria dei singoli errori relativi

$$\frac{\Delta z}{z} \leq \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \dots + \frac{\Delta w}{w}$$

Formula generale della propagazione degli errori

Se invece abbiamo una **funzione di parecchie variabili** $q = q(x, y, \dots, z)$, allora se le incertezze di x, y, \dots, z sono indipendenti e casuali allora l'incertezza di q è

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \Delta z\right)^2}$$

Questa è la formula più generale che ci permette il calcolo dell'incertezza di una funzione, dove le incertezze sono le incertezze strumentali per misure singole e invece per misure ripetute saranno le deviazioni standard.

E' evidente che se q è funzione di una sola variabile si ha

$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x$$

In altre parole questo termine costituisce da solo l'incertezza su q , che potremo anche chiamarla *incertezza parziale*, su q rispetto alla variabile x , allora allo stesso modo potremo considerare le altre incertezze parziali, rispetto a y, \dots, z , se q dipendesse da più variabili. In base a queste considerazioni la formula generale la si può pensare come somma quadratica delle incertezze parziali. In tal modo abbiamo un suggerimento su come usare la formula generale, dapprima si calcolano le incertezze parziali e poi si sommano in quadratura, e qualora le variabili non siano indipendenti comunque l'incertezza su q non supera la semplice somma delle incertezze parziali, ossia

$$\Delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \Delta y + \dots + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right| \Delta z$$

Esempio

Come semplice applicazione della formula supponiamo di aver effettuato la seguente misura di un angolo

$\theta = 20^\circ \pm 3^\circ$ e di voler calcolare $\cos \theta$. La miglior stima del coseno è ovviamente $\cos 20^\circ = 0.94$, per l'incertezza si ha

$$\Delta(\cos \theta) = \sqrt{\left(\frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2} = \left| \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial \theta} \right| \Delta \theta = |\sin \theta| \Delta \theta \quad (\text{in rad})$$

Abbiamo indicato che il risultato è in radianti perché la derivata del coseno è $-\sin$ solo se l'angolo è espresso in radianti, perciò occorre trasformare i gradi in radianti: $3^\circ = 0.05 \text{ rad}$, allora si ha

$$\Delta(\cos \theta) = |\sin 20^\circ| \cdot 0.05 = 0.34 \cdot 0.05 = 0.02$$

In definitiva si ha $\cos \theta = 0.94 \pm 0.02$

Vediamo, in conclusione di queste note il caso in cui q sia funzione di più variabili.

Sia $q = x^2y - xy^2$

essendo $x = 3.0 \pm 0.1$ e $y = 2.0 \pm 0.1$

Calcoliamo dunque le incertezze parziali

$$\Delta q_x = \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \Delta x = |2xy - y^2| \Delta x = |2 \cdot 4 - 4| \cdot 0.1 = 0.8$$

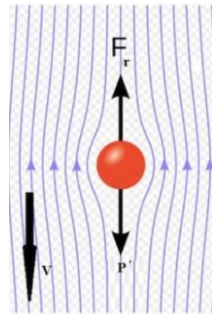
$$\Delta q_y = \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \Delta y = |x^2 - 2xy| \Delta y = |9 - 12| \cdot 0.1 = 0.3$$

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y} \Delta y \right)^2} = \sqrt{0.8^2 + 0.3^2} = 0.9$$

Il risultato finale è $q = 6.0 \pm 0.9$

Moto con forze viscose

a cura di Giancarlo Buccella



Quando un oggetto si muove all'interno di un fluido, come l'aria o l'acqua, sperimenta una forza di resistenza che si oppone al suo moto, tendendo a ridurre la velocità. Questa forza, nota come resistenza del mezzo o attrito viscoso, aumenta con l'aumentare della velocità del corpo. La sua dipendenza dalla velocità, tuttavia, è complessa e influenzata da numerosi parametri, tra cui le dimensioni geometriche, la forma, le caratteristiche superficiali dell'oggetto e le proprietà del fluido come densità, viscosità e temperatura.

La trattazione di questa forza di resistenza si basa spesso su modelli empirici. Sebbene le relazioni generali tra i parametri possano essere talvolta dedotte da considerazioni dimensionali, i valori numerici specifici devono essere determinati sperimentalmente, ad esempio attraverso test in una galleria del vento. Solo in casi di geometrie molto semplici e condizioni di moto particolari è possibile determinare teoricamente la forza di resistenza.

In generale la forza di attrito viscoso viene descritta mediante due diversi modelli:

- 1) Il primo modello valido in caso di basse velocità (ad esempio una sfera che cade nell'acqua). In questo modello la forza di attrito viscoso aumenta proporzionalmente con la velocità.
- 2) Il secondo modello è invece valido quando si studia il moto di oggetti di grandi dimensioni che si muovono ad elevata velocità (aereo, paracadutista, automobile). In questo modello la forza aumenta con il quadrato della velocità.

Questa resistenza dipende, come già accennato, oltre che dalla velocità, dalla forma e dalle dimensioni dell'oggetto e dalle caratteristiche del fluido (es. densità, viscosità, ecc.).

Forma - Per descrivere come influenza il moto la forma del corpo si usa il cosiddetto "Il coefficiente di resistenza aerodinamica" (o coefficiente di penetrazione aerodinamica) C_x , esso è un coefficiente adimensionale usato per misurare la resistenza aerodinamica di un corpo in moto in un fluido. Comprende, per un corpo generico, i contributi di due tipi di resistenza fluidodinamica: la resistenza di attrito e la resistenza di forma. Ad esempio per un paracadute vale 1.4 mentre per un'auto 0.3.

Dimensione - Considerando che a parità di coefficiente di resistenza aerodinamica, due corpi possono subire una maggiore o minore resistenza aerodinamica semplicemente per una sezione frontale maggiore o minore, ecco che entra in gioco anche la dimensione del corpo ossia più precisamente l'area della sezione del corpo proiettata sul piano perpendicolare del moto.

Viscosità – La viscosità di un fluido viene descritta mediante il coefficiente di attrito viscoso **dinamico** (η) e **cinematico** (ν), essa è una grandezza che misura la propensione di un fluido a generare attrito interno tra i propri strati in movimento; è una caratteristica che dipende solamente dal tipo di fluido e che riguarda esclusivamente i fluidi reali.

L'unità di misura della viscosità più utilizzata nel SI è il poiseuille (PI) ed è definita come

$$PI = \frac{kg}{m \cdot s} = P_a \cdot s \quad \text{dove } P_a \text{ indica il pascal,}$$

mentre nel Sistema CGS si usa il poise (P) definito come

$$P = 0.1 \cdot PI = 0.1 \cdot P_a \cdot s$$

Occorre precisare che la viscosità varia con la temperatura e pertanto va specificato a quale valore di essa si riferisce.

Tabella esemplificativa con i valori di viscosità cinematica e dinamica

Liquidi	η / mPa*s a 20°C	η / mPa*s a 0°C	ν / mm²/s a 20°C
Acqua	1,002	1,792	1,004
Olio d'oliva	80,8		89
Etanolo	1,20	1,78	1,52
Metanolo	0,587	0,820	0,742
Benzolo	0,648	0,91	0,737

Gas a 0°C; 1013 hPa	η / μ Pa*s	ν / mm²/s
Aria	17,2	13,3
Anidride carbonica	13,7	6,93
Azoto	16,5	13,2
Ossigeno	19,2	13,4

Si noti che l'attrito viscoso è responsabile ad esempio della rotazione dei fluidi all'interno di un contenitore. Se vogliamo mettere in rotazione dell'acqua chiusa in una bottiglia, in modo da formare un vortice, quello che facciamo a far roteare la bottiglia. Il moto rotatorio del contenitore viene trasmesso al fluido grazie all'attrito viscoso. Quando il moto rotatorio ha inizio, sono gli strati che aderiscono alle pareti della bottiglia i primi che, sotto l'effetto della forza di attrito, vengono trascinati e messi in rotazione. Questi, a loro volta, trascinano con sé gli strati d'acqua immediatamente più interni che cominciano così a mettersi in moto e via così procedendo sempre verso l'interno, allontanandosi progressivamente dalle pareti del contenitore. Gli strati d'acqua più prossimi all'asse di rotazione si metteranno in moto per ultimi e quelli vicini alle pareti della bottiglia avranno già acquisito una buona velocità. Al termine del processo però tutti gli strati di fluido, indipendentemente dalla loro posizione, avranno raggiunto la medesima velocità angolare.

Esiste una formula per calcolare la forza di attrito viscoso all'interno di un fluido, ed è la seguente:

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

Dove η è il coefficiente viscoso dinamico, dS è la superficie di contatto tra due strati di fluido adiacenti mentre con il rapporto dv/dn viene indicata la variazione di velocità lungo la direzione ortogonale alla superficie di contatto.

Viscosità dinamica

Se pensiamo ad esempio ad un moto di un fluido in un condotto, indicando con

- F la forza applicata tangenzialmente alla superficie
- S l'area della lamina superficiale del liquido
- v la sua velocità e con h la sua distanza dalla lamina aderente sul fondo del recipiente

sussiste la seguente identità:

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{h}$$

In cui il coefficiente di proporzionalità η prende il nome di **viscosità dinamica** del liquido. Dalla relazione precedente si ricava:

$$\eta = \frac{F}{S} \frac{h}{v}$$

tenendo conto che la forza si esprime in Newton, la distanza in metri, la superficie in m^2 e la velocità in m/s si può ricavare l'equazione dimensionale di η :

$$\eta = N \cdot m / m^2 m/s = [N \cdot s / m^2] = Kg/m s$$

Viscosità cinematica

Essa è data semplicemente dal rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido.

$$\nu = \frac{\eta}{d}$$

Densità – La densità è un parametro che entra in modo diretto nella descrizione di un moto viscoso in varie relazioni ed anche attraverso la grandezza viscosità cinematica (o diffusività cinematica).

Essa è una misura della resistenza a scorrere di una corrente fluida sotto l'influenza della gravità. Questa tendenza dipende sia dalla viscosità dinamica sia dal peso specifico del fluido. Quando due fluidi di uguale volume sono messi in viscosimetri capillari identici e lasciati scorrere per gravità, il fluido avente maggior diffusività impiega più tempo a scorrere. Per esempio il mercurio risulta avere una viscosità dinamica 1,7 volte maggiore di quella dell'acqua, ma a causa del suo elevato peso specifico, esso percola molto più rapidamente da uno stesso foro a parità di volume. Infatti la viscosità cinematica del mercurio è nove volte minore di quella dell'acqua a temperatura ambiente (20 °C).

Per descrivere la viscosità cinematica è utile introdurre un parametro – detto numero di Reynolds - che ci permette di distinguere tra regime laminare e regime turbolento. Il numero di Reynolds (abbreviato in R_e) è un numero adimensionale usato in fluidodinamica, esso è proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi.

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Dove v è la velocità del flusso del fluido (velocità media, nel caso di scorrimento in un condotto, oppure velocità rispetto al corpo in esame), ρ la sua densità, η è la viscosità dinamica ed L è una "lunghezza caratteristica" del problema (per es. nel caso del moto di un fluido in un condotto L è il diametro del condotto).

I valori critici del numero di Reynolds per i quali si passa dal regime laminare al regime turbolento dipendono ovviamente dalla forma geometrica dei sistemi. Esistono tuttavia dei criteri empirici approssimativi del tipo:

- $R_e < 1000$ il moto è sempre laminare
- $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r il flusso è sempre laminare
- $R_e > 2000$ in tubature diritte di sezione circolare si può avere moto laminare o turbolento a seconda di vari fattori, tra cui la rugosità della parete del tubo, ecc...
- $R_e > 10000$ il regime è sempre turbolento

Un caso interessante si presenta per valori di $R_e < 2000$ in tubature diritte di sezione circolare di raggio r , qualora si fissino i valori della densità e della viscosità, risulta che ad una certa velocità, detta velocità critica, avviene il passaggio dal moto laminare a quello turbolento, infatti:

$$v_c = \frac{\eta}{\rho r} R_e$$

Si verifica sperimentalmente che un fluido in un condotto cilindrico passa da un moto laminare a uno turbolento quando $Re \approx 1200$. Per valori prossimi a 1200 il passaggio avviene gradualmente e prendi il nome di regime di transizione. Quindi ragionando in termini di velocità critica abbiamo che per velocità inferiori a

$$v_c = 1200 \frac{\eta}{\rho r}$$

Il moto sarà laminare, per valori superiori sarà turbolento.

Ad esempio per il moto di acqua in un tubo circolare di raggio $r = 1 \text{ cm}$, essendo $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ed $\eta = 10^{-2}$ poiseuille la velocità critica sarà

$$v_c = 1200 \frac{10^{-2}}{10^3 \cdot 10^{-2}} = 1.2 \text{ m/s}$$

In generale la forza di attrito viscoso nel modello di proporzionalità con la velocità è data da

$$F_R = b v = K \eta v \quad (1)$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo mentre η è il coefficiente di viscosità del fluido.

Legge di Stokes

Limitiamo ora la nostra analisi fenomenologica ai casi in cui la forma dell'oggetto sia sufficientemente regolare e la sua velocità sufficientemente bassa affinché gli spostamenti di fluido provocati dal passaggio dell'oggetto in movimento non siano accompagnati da fenomeni vorticosi, cioè indagheremo solamente i moti laminari.

Con tale premessa e con l'aggiunta che il corpo sia dotato di simmetria intorno alla direzione del moto, si può dire che la forza resistente che il mezzo esercita al moto del corpo è direttamente proporzionale alla velocità:

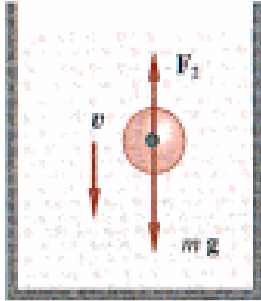
$$F_R \propto v^n$$

di solito la costante di proporzionalità – che dipende sia dalla forma dell'oggetto che dalle proprietà del fluido - viene indicata con la lettera b , quindi avremo:

$$F_R = b v^n$$

Discutiamo ora analiticamente i casi $n = 0$, $n=1$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 2$.

Per iniziare semplificando l'approccio pensando al caso di un corpo di massa m che cada sotto l'azione della gravità in un mezzo viscoso.



L'equazione del moto è allora: $ma = mg - F_R = mg - b v^n$ (1 bis)

(avendo posto l'asse y verso il basso)

Posto che F_R non potrà essere maggiore di mg ma al massimo potrà essere uguale, nel qual caso si ha $ma = 0$ ossia $v = \text{cost}$, tale velocità è detta velocità limite ed in generale vale

$$v_L = \left(\frac{mg}{b} \right)^{1/n} \quad (2)$$

Se ora, come si usa, poniamo $\frac{m}{b} = \tau$ (detto tempo di rilassamento o tempo caratteristico)

si ha

$$v_L = (\tau g)^{1/n} \quad (3)$$

Anticipiamo il fatto che solo se $n < 1$ la soluzione analitica conduce a valori finiti per la velocità, in tutti gli altri casi la velocità tenderà asintoticamente, alla velocità limite.

Caso $n = 1$

L'equazione del moto è $ma = -bv$ (4)

In questo caso la forza motrice è assente: realisticamente significa che la forza motrice ha agito fino all'istante in cui scompare avendo impresso al corpo una certa velocità, come quando in una strada liscia (priva di attrito) un'auto spegne il motore, il fluido aria rallenterà il suo moto fino a fermarla.

Avremo

$$m \frac{dv}{dt} = -bv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int dt$$

$$\log v + c_1 = -\frac{t}{\tau} + c_2$$

(N.B. Usiamo il simbolo log per indicare il logaritmo naturale)

Si possono senz'altro accorpare le due costanti avendo:

$$\log v = -\frac{1}{\tau} t + c$$

Imponendo che al momento iniziale sia $v = v_0$ e $t = t_0 = 0$ si ha

$$\log v_0 = c$$

$$\log v = -\frac{1}{\tau} t + \log v_0$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} t$$

$$\frac{v}{v_0} = \exp(-t / \tau)$$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau};$$

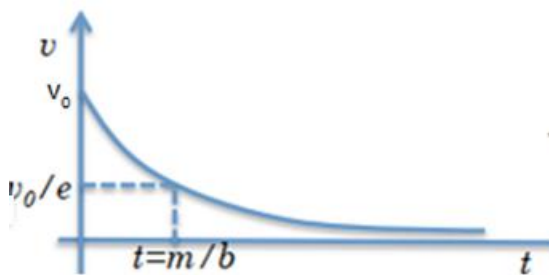
essendo $\tau = \frac{m}{b}$ (5)

Da questa relazione si vede subito il significato del parametro τ , infatti si ha

$$\begin{aligned}
 t = \tau & \quad v(t) = (1/e) v_0 = 0.37 v_0 \\
 t = 2\tau & \quad v(t) = (1/e)^2 v_0 = 0.14 v_0 \\
 t = 3\tau & \quad v(t) = (1/e)^3 v_0 = 0.12 v_0 \\
 t = 4\tau & \quad v(t) = (1/e)^4 v_0 = 0.018 v_0 \\
 t = 5\tau & \quad v(t) = (1/e)^5 v_0 = 0.0067 v_0 = 0.7\% v_0 \\
 & \dots \\
 t = 10\tau & \quad v(t) = 0.45 \cdot 10^{-3} v_0 \\
 t = 50\tau & \quad v(t) = 1.9 \cdot 10^{-22} v_0
 \end{aligned}$$

Spesso si prende come valore “asintotico” 5τ , valore per il quale la velocità vale meno dell’1% del valore iniziale, si vede comunque che ad esempio per $t = 50\tau$ la velocità è $10^{-22} v_0$.

Graficamente



Dal punto di vista matematico e non fisico dovremmo dire che occorre un tempo infinito affinché il corpo si arresti. Questo è uno dei quei casi in cui il senso fisico corregge il verdetto matematico. Ora risolviamo l’equazione del moto in funzione dello spostamento x .

$$m \frac{dv}{dt} = -bv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dt; \quad \text{sostituendo} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dx} dt = -\frac{1}{\tau} dt$$

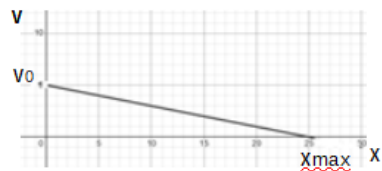
$$dv = -\frac{1}{\tau} dx$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$v - v_0 = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

E quindi

$$v(x) = v_0 - \frac{b}{m} (x - x_0) \quad (6)$$



Il cui andamento qualitativo è il seguente.

Da questa relazione possiamo calcolare la distanza che il corpo percorre prima di arrestarsi (dopo un tempo infinito);

$$x_{\max} = \tau v_0 = \frac{m}{b} v_0 \quad (7)$$

Dalla relazione di $v(x)$ infine esplicitiamo la legge oraria.

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{b}{m} x$$

$$\frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = dt$$

$$\int_0^x \frac{dx}{v_0 - \frac{b}{m} x} = \int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{\log(v_0 - \frac{x}{\tau})}{\frac{1}{\tau}} \right]_0^x = t$$

$$\left[\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) \right]_0^x = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log(v_0 - \frac{x}{\tau}) - \log v_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\log \frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{(v_0 - \frac{x}{\tau})}{v_0} = e^{-t/\tau}$$

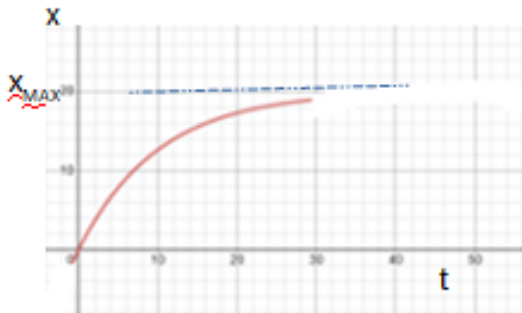
$$(v_0 - \frac{x}{\tau}) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$-\frac{x}{\tau} = v_0 e^{-t/\tau} - v_0$$

$$x(t) = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

Si noti che si poteva più agevolmente ricavarla dalla relazione $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

Il cui grafico qualitativo è il seguente



Nel caso il moto partisse all'istante zero con coordinata x_0 si avrebbe

$$x(t) = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (9)$$

Esempio 1

Un oggetto di massa 5 kg, inizialmente fermo, è sottoposto ad un impulso $I = 10 \text{ N s}$. Quale distanza percorre prima di arrestarsi su un piano liscio orizzontale considerando l'attrito viscoso dovuto alla presenza di aria (la costante di rilassamento sia $\tau = 5 \text{ s}$)?

Calcoliamo la velocità che l'oggetto, sottoposto alla forza impulsiva di 10 N s , acquisterà

$$I = \Delta p = m \Delta v = m(v_f - v_i) = m v_f$$

$$v_f = I / m = 10 / 5 = 2 \text{ m/s}$$

Usando la relazione trovata della distanza massima percorsa da un oggetto sottoposto alla sola forza viscosa si ha

$$x_{\max} = \tau v_0 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ m}$$

Osservazione: il modello ci informa della distanza percorsa dall'oggetto prima di fermarsi ma lo fa supponendo un tempo infinito, questo è un limite della nostra rappresentazione semplificata della realtà, infatti ad un certo punto quando la velocità si approssima allo zero intervengono altri fattori, quali ad esempio l'attrito statico, il moto browniano, ecc... che fanno arrestare l'oggetto in un tempo finito.

Caso n = 1

L'equazione del moto in questo caso è $ma = mg - b v$ (10)

Dove $(b v)$ è la forza di attrito viscoso, il coefficiente di proporzionalità è dato dal prodotto di due parametri $b = K \eta$ dove K è il fattore di forma

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

Considerando un moto con $v(t) = v_0$ per $t = 0$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg/b - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Sfruttando la (2): $mg/b = v_L$ si ha

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v_L - v} = \int_0^t \frac{b}{m} dt$$

Ricordando che

$$\int \frac{dx}{A - x} = -\log(A - x) + \text{cost} \text{ si ha}$$

$$-\left[\log(v_L - v(t)) - \log(v_L - v_0)\right] = \frac{b}{m} t$$

$$\log \frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{v_L - v(t)}{v_L - v_0} = e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = v_L - (v_L - v_0)e^{-t/\tau} \quad (11)$$

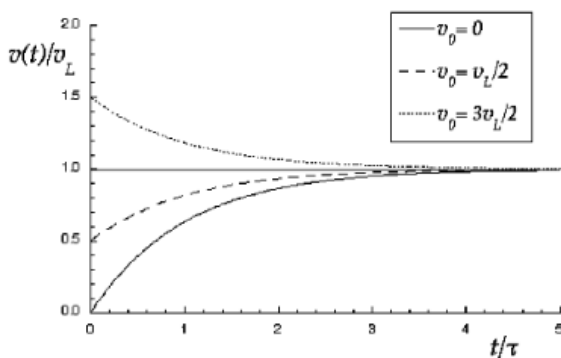
Oppure in termini del tempo di rilassamento

$$v(t) = \tau g - (\tau g - v_0)e^{-t/\tau} \quad (12)$$

Da cui vediamo che per $t \rightarrow \infty$ $v(t) \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$

Si noti come v_L sia indipendente dal valore della velocità iniziale. Il valore della costante di rilassamento dà una misura di quanto rapidamente il corpo raggiunge la velocità limite.

L'andamento della velocità normalizzata con la velocità limite, per diversi valori di v_0 , è mostrata di seguito – si noti in particolare che quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale maggiore di v_L , essa diminuirà progressivamente per raggiungere, asintoticamente, il valore v_L .



Un semplice ragionamento consente di ricavare direttamente il valore della velocità limite senza risolvere alcuna equazione differenziale. Supponiamo, per comodità, che il corpo sia lasciato, all'istante $t = 0$, con velocità nulla. Inizialmente, quindi, la forza di attrito ha modulo nullo e il corpo risente esclusivamente della forza di gravità, per cui accelera verso il basso con accelerazione g . All'aumentare della velocità, anche la forza di attrito aumenta e quindi il corpo presenta un'accelerazione via via minore. La condizione limite viene raggiunta quando la forza di attrito uguaglia esattamente (in modulo) la forza peso, per cui la risultante delle forze agenti sul corpo è nulla. In queste condizioni il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme. Dall'uguaglianza delle due forze agenti sul corpo si ha (ed a quel punto la v diventa v_L):

$$ma = 0 = mg - b v_L$$

$$b v_L = mg \rightarrow v_L = \frac{mg}{b}$$

Ricaviamo l'espressione della velocità in funzione dello spostamento.

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - bv$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{b}{m} v$$

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m} v} v = dx$$

$$\text{sostituendo } \frac{m}{b} = \tau; \quad v_L = \frac{mg}{b} \equiv \tau g$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L - v} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

Ricordando che

$$\int \frac{x}{x-A} dx = -A \log(x-A) - x + \text{cost}$$

$$\frac{b}{m} x - \frac{b}{m} x_0 = -v_L \log(v - v_L) - v + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v - v_L) + v = -\frac{b}{m} x + \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

$$v_L \log(v(x) - v_L) + v(x) = K - \frac{b}{m} x \quad (13)$$

$$K = \frac{b}{m} x_0 + v_L \log(v_0 - v_L) + v_0$$

Si vede quindi che non è possibile ottenere una soluzione analitica in forma chiusa,

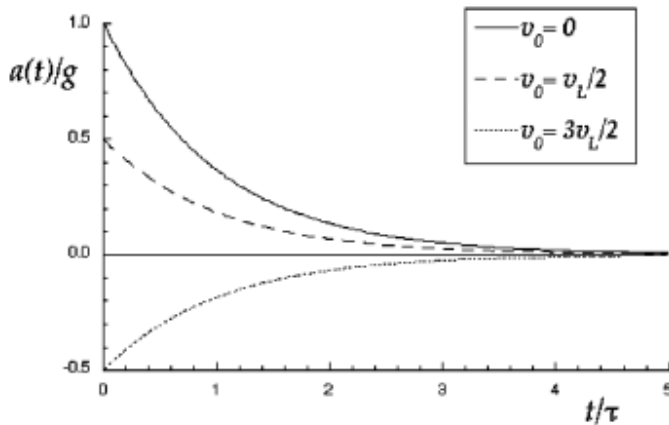
Cioè non è possibile ottenere esplicitamente $v = v(x)$ in quanto l'equazione contiene sia v che $\log(v - v_L)$, ma è possibile avere $x(v)$ oppure la curva in forma parametrica $(x(t), v(t))$, il che ci permette di avere un'idea abbastanza precisa di come vanno le cose.

Oppure si potrà procedere con metodi numerici.

Vediamo come vanno le cose per l'accelerazione, la possiamo ricavare derivando la (12)

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} [\tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}] = \frac{1}{\tau} (v_L - v_0) e^{-t/\tau} = \left(g - \frac{v_0}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \quad (14)$$

Notiamo che l'accelerazione vale $(g - v_0/\tau)$ per $t = 0$ e tende ad annullarsi con legge esponenziale, governata dal parametro τ . L'andamento grafico, normalizzata con g , è il seguente.



Al fine di ricavare la legge oraria basta integrare la (12)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \tau g - (\tau g - v_0) e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}$$

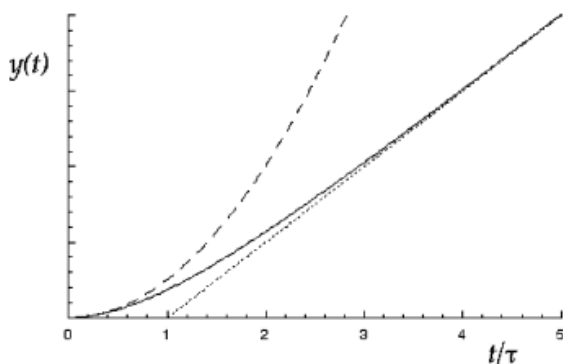
$$[v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt = dx$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t [v_L - (v_L - v_0) e^{-t/\tau}] dt$$

$$x - x_0 = v_L t + (v_L - v_0) \tau (e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau (v_L - v_0) (e^{-t/\tau} - 1) \quad (15)$$

L'andamento, in funzione di t/τ è il seguente:



Dalla (15) si vede che per valori di t molto grandi l'andamento dello spostamento è lineare, infatti per t grandi la velocità assume un valore costante pari a v_L .

Si può notare, altresì, come per valori di t/τ molto piccoli, l'andamento sia simile a quello uniformemente accelerato che si avrebbe in assenza di forze di attrito (linea tratteggiata). Questo

fatto si può dimostrare partendo dall'espressione (15) – limitandoci per semplicità al caso di velocità iniziale nulla $v_0 = 0$ – ed approssimandola per valori molto piccoli di t/τ : In tale situazione, per l'esponenziale è lecito adottare uno sviluppo di Taylor troncato al secondo ordine, cioè

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \text{ che sostituito nella (15) dà}$$

$$x(t) = x_0 + v_L t + \tau(v_L - v_0)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$x(t) \approx x_0 + v_L t + \tau(v_L)(1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - 1) =$$

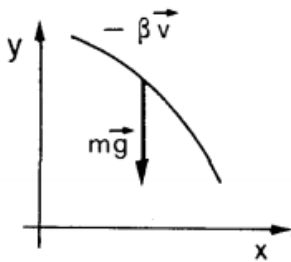
$$= x_0 + v_L t + \tau(v_L) \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) = x_0 + v_L t - \tau v_L \frac{t}{\tau} + \tau v_L \frac{1}{2} \frac{t^2}{\tau^2} =$$

$$= x_0 + v_L t - v_L t + \frac{1}{2} v_L \frac{t^2}{\tau} = x_0 + \frac{1}{2} \frac{mg}{b} \frac{b}{m} t^2 = x_0 + \frac{1}{2} g t^2$$

Consideriamo il vettore \mathbf{v}_0 non perpendicolare al terreno, avremo così un moto in due dimensioni.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$$

Scegliamo un SR con l'asse x orizzontale e asse y verticale orientato verso l'alto.



Avremo:

$$\begin{cases} -bv_x = m \frac{dv_x}{dt} \\ -mg - bv_y = m \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -\frac{m}{b} \frac{dv_x}{dt} \\ mg + bv_y = -\frac{m}{b} \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (16)$$

Esse sono due equazioni differenziali disaccoppiate del tipo

$$A + v = -B \frac{dv}{dt} \quad (17)$$

Essendo

$$\begin{cases} B = \frac{m}{b}; A = 0 & \text{per la prima della (16)} \\ B = \frac{m}{b}; A = \frac{mg}{b} & \text{per la seconda della (16)} \end{cases} \quad (18)$$

La (17) è un'equazione differenziale del primo ordine in $v(t)$ che si integra facilmente per separazione di variabili: cost

$$\frac{dv}{A+v} = -\frac{dt}{B}$$

$$\log(A+v) = -\frac{t}{B} + \text{cost}$$

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = Ce^{-t/B}$$

Sia $v=0$ per $t=0$,

allora avremo $C = A + v_0$, quindi la relazione precedente diventa

$$A+v = e^{-t/B + \text{cost}} = (A + v_0)e^{-t/B}$$

Ovvero

$$v(t) = (A + v_0)e^{-t/B} - A$$

Tenendo conte della (18) la soluzione è

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0,x}e^{-t/\tau} \\ v_y &= (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L \end{aligned} \quad (19)$$

Notiamo che all'aumentare del tempo la componente orizzontale della velocità diminuisce con legge esponenziale e tende a zero per valori grandi di t . La componente verticale, invece, qualunque sia il valore di $v_{0,y}$ per t grande tende al valore asintotico $v_L = -mg/b$, e vediamo che il suo valore è tanto più piccolo quanto più grande è il rapporto b/m : poiché fissato il fluido, il parametro b dipende solo dalla forma dell'oggetto, la velocità limite è tanto maggiore quanto più grande è la sua massa. Fissata invece la massa, la v_L è tanto minore quanto più grande è b .

Possiamo infine ricavare le equazioni orarie.

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_{0,x}e^{-t/\tau} dt; \quad \int_{y_0}^y dy = \int_0^t [(v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$x(t) = v_{0,x}(\tau - \tau e^{-t/\tau}) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

$$y(t) = y_0 + \tau[(v_L + v_{0,y}) - (v_L + v_{0,y})e^{-t/\tau}] - v_L t = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})(1 - e^{-t/\tau}) - v_L t$$

Troviamo per concludere l'equazione della traiettoria.

Isoliamo l'esponenziale dalla prima equazione e troviamo t in funzione di x :

$$x(t) = v_{0,x}\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad e^{-t/\tau} = 1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}; \quad -\frac{t}{\tau} = \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right);$$

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)$$

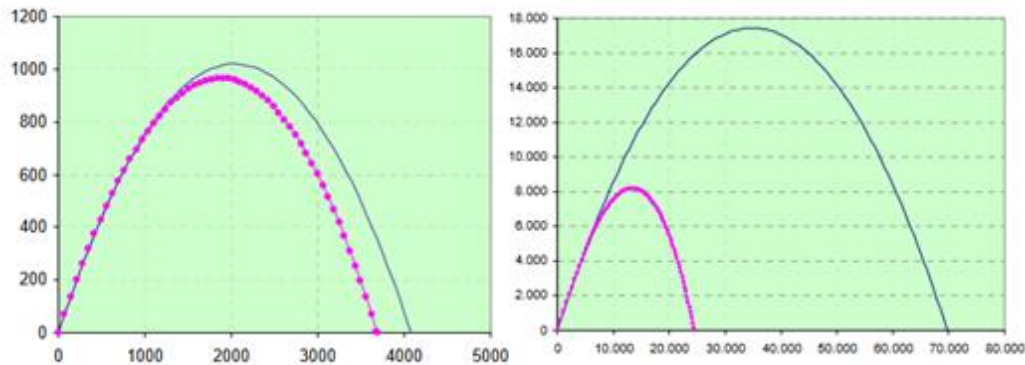
Sostituendo quindi questa espressione in $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \tau(v_L + v_{0,y})\left[1 - \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right] - v_L \left[-\tau \log\left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x}\tau}\right)\right]$$

Dunque l'equazione della traiettoria è

$$y(t) = y_0 + \frac{(v_L + v_{0,y})}{v_{0,x}} x(t) + \tau v_L \log \left(1 - \frac{x(t)}{v_{0,x} \tau} \right) \quad (21)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



Traiettoria di un proiettile di artiglieria (calibro 155, 44kg, sparato a 45°) a sinistra con velocità iniziale 200m/s, a destra con velocità iniziale 827m/s. I punti rappresentano la traiettoria con resistenza dell'aria, le linee continue la traiettoria che avrebbe seguito in vuoto.

Esempio 2

Calcolare la velocità limite per le gocce d'acqua che cadono in presenza di aria.
(raggio = 10^{-5} m; $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s)

Per risolvere questo esercizio sarà utile richiamare la legge di Stokes che riguarda la forza di attrito viscoso a cui è soggetta una sfera in moto in un fluido con numero di Reynolds minore di 0.6: essa fu dedotta da George Stokes nel 1851. Costituisce un'applicazione al caso pratico della sfera della più generale legge di Newton-Stokes - la legge costitutiva dei fluidi a viscosità lineare.

La forza di resistenza detta anche forza di Stokes su una sfera è espressa dalla seguente relazione

$$F_R = bv = K\eta v = 6\pi r \eta v$$

Dove K è un coefficiente che tiene conto della forma del corpo, r è il raggio della sfera ed η è il coefficiente di viscosità (dinamica) del fluido, mentre v è la velocità relativa fra la sfera ed il fluido. Per forme geometrie semplici è possibile ricavare l'espressione di K, che nel caso della sfera vale $K = 6\pi r$

Mentre ad esempio per un cilindro che cade verticalmente con l'asse di simmetria verticale si ha:

$$K = 2\pi L (\log(L/r) - 0.5)$$

dove L è la lunghezza del cilindro ed r il suo raggio.

Non tenendo conto della forza di Archimede si ha (moto unidimensionale, asse y verso il basso)

ma = mg – bv a regime si ha

$$= \frac{mg}{b} = \frac{mg}{K\eta}$$

Occorre ricavare la massa della goccia $m = d \cdot V$

dove d è la densità dell'acqua, il cui valore è noto essere 10^3 kg/m^3 e V il volume della goccia che ricaviamo dalla relazione del volume di una sfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-5})^3 = \frac{4}{3} \pi 10^{-15} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 1.3 \pi \cdot 10^{-15} = 1.3 \pi 10^{-12} \text{ kg}$$

Quindi la velocità limite vale

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{1.3\pi \cdot 10^{-12} \cdot 9.81}{6\pi \cdot 10^{-5} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} = 1.25 \text{ cm/s}$$

Per gocce più grandi aventi raggio di 1 mm si ha

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$m = d \cdot V = 10^3 \cdot 4.19 \cdot 10^{-9} = 4.19 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$v_L = \frac{mg}{K\eta} = \frac{4.19 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81}{6\pi \cdot 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.1 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 460 \text{ km/h}$$

Consideriamo ora il contributo della forza di Archimede che è pari al peso del volume di fluido spostato. L'equazione del moto è ora

$$ma = mg - bv + F_A$$

Quando si raggiunge la condizione di regime l'accelerazione si annulla e si ha

$$bv_L = mg - F_A$$

$$v_L = \frac{mg - F_A}{K\eta}$$

$$\text{con } F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g$$

dove d_f è la densità del fluido che in questo caso è l'aria, quindi $d_f = 1.23 \text{ kg/m}^3$

Nel caso della goccia precedente ($r = 1 \text{ mm}$) si ha

$$F_A = m_f g = d_f \cdot V \cdot g = d_f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g = 1.23 \frac{4}{3} \pi \cdot (10^{-3})^3 \cdot 9.81 = 50.5 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$m = d_{\text{acqua}} \cdot V = d_{\text{acqua}} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 10^3 \frac{4}{3} \pi (10^{-3})^3 = 4.18 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

$$v_L = \frac{mg - m_f g}{K\eta} = \frac{4.18 \cdot 10^{-6} \cdot 9.81 - 50.5 \cdot 10^{-9}}{6\pi 10^{-3} \cdot 1.7 \cdot 10^{-5}} = \frac{41.07 \cdot 10^{-6} - 50.5 \cdot 10^{-9}}{32.0 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \frac{41.01 \cdot 10^{-6}}{32.0 \cdot 10^{-8}} = 1.28 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 461 \text{ km/h}$$

Più elegantemente la velocità limite si può esprimerla nel seguente modo

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (d_{\text{acqua}} - d_{\text{aria}})$$

Per gocce con raggio di 0.5 mm si ha un valore più basso

$$v_L = \frac{2}{9} \frac{(0.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 9.81}{1.7 \cdot 10^{-5}} (1000 - 1.23) = 32 \text{ m/s} = 115 \text{ km/h}$$

Si tenga presente che i valori sperimentali della velocità limite che una goccia di pioggia può avere (con raggio compreso fra 0.25 mm e 4 mm (se più grande si spezza) variano da 8 km/h a 40 km/h.

Sono diversi i fattori che riducono drasticamente i valori precedentemente trovati con il nostro modello semplificato, si consideri ad esempio che valori maggiori di 10^{-4} m intervengono fattori di turbolenza e la dipendenza lineare dalla velocità non è più una ipotesi accettabile.

Esempio 3

Una particella di massa m viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 in presenza della gravità e di attrito viscoso. Siano noti i valori dell'accelerazione di gravità g , del coefficiente di resistenza viscosa K e del coefficiente di viscosità η . Calcolare il tempo a cui la particella raggiunge la quota massima e il valore di quest'ultima e confrontarli con il caso in cui l'attrito sia assente. Quale errore si fa nel trascurare l'attrito nel calcolo della quota massima?

In moto è puramente unidimensionale: scegliamo l'asse y rivolto verso l'alto.

Possiamo allora usare la seconda delle (19) considerando ora che v_0 ha solo componente y : $v_{0y} = v_0$

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \quad (a)$$

A partire da questa espressione possiamo ricavare il tempo, T , che passa dall'istante iniziale ($t=0$; $y=0$)

fino a quando la particella salendo rallenta fino a fermarsi $v(t) = 0$.

$$0 = (v_L + v_0)e^{-T/\tau} - v_L; \quad e^{-T/\tau} = \frac{v_L}{(v_L + v_0)}; \quad -\frac{T}{\tau} = \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right) \quad (b)$$

$$T = -\tau \log\left(\frac{v_L}{(v_L + v_0)}\right)$$

Si noti che il tempo è sicuramente positivo in quanto il valore del logaritmo, avendo argomento minore di 1, è negativo.

Ricordando che $\tau = v_L/g$ si ha

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \quad (c)$$

Possiamo anche calcolare la quota massima raggiunta dalla particella usando la seconda delle (20), ponendo $y_0 = 0$ e $t = T$, a tal uopo integriamo la (a)

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L; \quad dy = [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$\int_0^{y_{\max}} dy = \int_0^T [(v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L] dt$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(1 - e^{-T/\tau})$$

Sfruttando la seconda relazione della (b)

$$y_{\max} = -v_L T + \tau(v_L + v_0)(e^{-T/\tau} - 1) = -v_L T + \tau(v_L + v_0) \left(1 - \frac{v_L}{(v_L + v_0)} \right)$$

$$y_{\max} = -v_L T + \tau v_0$$

$$y_{\max} = -v_L \frac{v_L}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \tau v_0$$

Che possiamo riarrangiare nel seguente modo

$$y_{\max} = -\frac{v_L^2}{g} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) + \frac{v_L}{g} v_0$$

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (d)$$

Le soluzioni trovate per T e y_{\max} possono essere confrontate con gli analoghi risultati del problema balistico in assenza di attrito. In tal caso, il tempo di salita, come noto, vale $T_0 = v_0/g$, che equivale a metà del tempo di volo in una traiettoria parabolica con ritorno alla stessa quota di partenza. Graficamente, il tempo v_0/g corrisponde all'intersezione della retta $v(t) = v_0 - gt$ con l'asse dei tempi nel diagramma t - v .

La quota massima è $y_{\max}' = v_0^2/(2g)$ e corrisponde all'area del triangolo sotteso dalla stessa retta (si veda la linea tratto-punto nella figura qui sotto).

Dunque, l'errore assoluto che si fa trascurando l'attrito è dato dalla differenza $\Delta y = y_{\max}' - y_{\max}$.

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right] \quad (e)$$

Usando le espressioni precedenti, l'errore relativo diventa

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log \left(1 + \frac{v_0}{v_L} \right) \right]}{\frac{v_0^2}{2g}} \quad (f)$$

Facciamo un esempio numerico, sia $v_0 = 30$ m/s $v_L = 10$ m/s, si ha

$$y_{\max} = \frac{10 \cdot 30}{9.81} \left[1 - \frac{10}{30} \log \left(1 + \frac{30}{10} \right) \right] = 21.2 \text{ m}$$

$$y_{\max}' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2 \cdot 9.81} = 45.9 \text{ m}$$

$$\Delta y = y_{\max}' - y_{\max} = 45.9 - 21.2 = 24.7 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta y}{y_{\max}'} = \frac{24.7}{45.9} = 54\%$$

Possiamo infine andare a verificare se le soluzioni trovate in presenza di viscosità convergono alle soluzioni note in assenza di viscosità. Per farlo occorre studiare il comportamento delle espressioni trovate nel caso in cui $K\eta \rightarrow 0$. Questo caso implica che sia $\tau \rightarrow \infty$ e $v_L \rightarrow \infty$ e dunque, per un qualsiasi valore ragionevole di v_0 e per tempi dell'ordine di T_0 (tempo di salita in assenza di attrito), si avrà $t/\tau \ll 1$ e $v_0/v_L \ll 1$. Si tratta quindi di andare a vedere come si comportano gli esponenziali del tipo e^{-x} ed i logaritmi del tipo $\log(1+x)$ per x piccoli.

[Qui si vede bene come l'esistenza di scale tipiche di tempi e di velocità permette di dare un significato fisico alla procedura di limite. Quando in fisica diciamo che un certo risultato deve essere ottenuto in un particolare limite in cui qualcosa diventa trascurabile, intendiamo che la soluzione generale deve assumere una forma nota quando una certa quantità è molto piccola rispetto ad una scala tipica fissata dai parametri del sistema. Individuare quale sia, di volta in volta, il "parametro piccolo" da usare come variabile in uno sviluppo in serie attorno ad un valore assegnato è una delle arti che si imparano nel mestiere del fisico].

Lo sviluppo di queste funzioni nell'intorno $x = 0$, come noto, è

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots; \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Quindi se prendiamo la velocità $v(t)$ data dalla (a) e tronciamo lo sviluppo dell'esponenziale al primo ordine nel parametro t/τ (piccolo), troviamo

$$v(t) = (v_L + v_0)e^{-t/\tau} - v_L \rightarrow v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

sostituendo $\tau = v_L/g$ si ha

$$v(t) \approx -v_L + (v_L + v_0)\left(1 - g \frac{t}{v_L}\right) = v_0 - \left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)gt \quad \text{ed infine usando il fatto che } v_0/v_L \ll 1 \text{ si ha}$$

$$v(t) \approx v_0 - gt$$

Che corrisponde al moto balistico in assenza di attrito.

Analogamente possiamo prendere l'espressione del tempo di salita, dato dalla (c) e sviluppare il logaritmo, troncandolo al primo ordine nel parametro (piccolo) v_0/v_L , avendosi

$$T = \frac{v_L}{g} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right) \rightarrow T \approx \frac{v_L}{g} \left(\frac{v_0}{v_L}\right) = \frac{v_0}{g} = T_0$$

Che di nuovo corrisponde al caso senza attrito, lo stesso vale per la quota massima raggiunta dal grave, infatti si ha dalla (d)

$$y_{\max} = \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \log\left(1 + \frac{v_0}{v_L}\right)\right]; \rightarrow y_{\max} \approx \frac{v_L v_0}{g} \left[1 - \frac{v_L}{v_0} \left(\frac{v_0}{v_L} - \frac{v_0^2}{2v_L^2}\right)\right] \frac{v_0^2}{2g} = y'_{\max}$$

Ne concludiamo che le soluzioni generali ottenute prima sono consistenti con quanto ci aspettiamo nel limite in cui l'attrito sia assente, notiamo che per trovare il limite corretto per la quota massima abbiamo dovuto usare un troncamento fino al secondo ordine.

Moto armonico con attrito viscoso

Dopo l'analisi del moto di un grave in presenza di attrito viscoso, dipendente linearmente dalla velocità, concludiamo questo caso studiandolo nel caso di moto armonico.

Consideriamo dunque un oscillatore che si muove armonicamente di moto unidirezionale.

Richiamiamo il concetto di moto oscillatorio ed armonico.

La differenza principale tra moto oscillatorio e moto armonico riguarda il tipo di movimento e le forze che lo causano. In pratica, il moto armonico è un caso particolare di moto oscillatorio. Vediamo le differenze in dettaglio:

1. Moto Oscillatorio

Il moto oscillatorio è un movimento in cui un oggetto si sposta avanti e indietro attorno a una posizione di equilibrio in modo periodico. Questo tipo di movimento può essere causato da diverse forze, ma non necessariamente deve seguire una legge matematica semplice come quella del moto armonico.

Esempi di moto oscillatorio che non sono armonici:

Un pendolo con smorzamento (quando l'attrito è presente).

Un corpo attaccato a una molla con forze non lineari.

In generale, il moto oscillatorio può essere descritto come periodico, ma le forze che lo causano possono essere non lineari o non conservative, il che significa che la forma dell'oscillazione potrebbe non essere perfettamente sinusoidale.

2. Moto Armonico

Il moto armonico è un tipo di moto oscillatorio molto specifico in cui l'oggetto si muove in modo periodico seguendo una traiettoria che può essere descritta matematicamente da una funzione sinusoidale (o cosinusoidale).

Questo movimento si verifica quando la forza che richiama l'oggetto verso la posizione di equilibrio è proporzionale e opposta allo spostamento dell'oggetto stesso. La relazione tra la forza e lo spostamento segue la legge di Hooke.

Matematicamente, il moto armonico può essere descritto con l'equazione:

$$F = -kx$$

Dove:

F è la forza di richiamo

k è la costante elastica (di una molla, ad esempio)

x_0 è lo spostamento dalla posizione di equilibrio (ampiezza iniziale).

Esempi di moto armonico:

Un oggetto attaccato a una molla che oscilla senza smorzamento (senza resistenza dell'aria o attrito).

Un pendolo semplice con piccole oscillazioni (dove il movimento è quasi armonico, in quanto la forza gravitazionale può essere approssimata come proporzionale allo spostamento per angoli piccoli).

Tutti i moti armonici sono oscillatori, ma non tutti i moti oscillatori sono armonici. Il moto armonico è una forma ideale di moto oscillatorio che avviene quando la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento, mentre il moto oscillatorio è un concetto più ampio che include anche movimenti che non seguono la legge di Hooke o che sono influenzati da forze dissipative. La legge del moto è quella del moto armonico con il più il termine della forza viscosa $F_R = bv$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b\dot{x} \text{ ovvero}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

E' comodo introdurre due parametri che si riveleranno essere molto utili nella discussione della soluzione e cioè la *pulsazione propria* dell'oscillatore $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e il coefficiente di smorzamento

$\gamma = \frac{b}{2m}$, con tali sostituzione l'equazione (22) diventa

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22)$$

Trattasi di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che ammette dunque una soluzione generale del tipo

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \quad (23)$$

Dove a e B sono due costanti di integrazione determinabile attraverso le condizioni iniziali; mentre α_1 e α_2 sono le soluzioni della seguente equazione algebrica associata

$$\alpha^2 + (2\gamma)\alpha + \omega_0^2 = 0$$

risolvendo

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (24)$$

Le caratteristiche del moto risultano diverse a seconda che α_1 e α_2 siano reali o complesse, cioè a seconda del segno del discriminante, si possono avere tre casi possibili.

Smorzamento forte

$$\text{Caso } \Delta > 0; \quad \gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{ossia} \quad \frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m}; \rightarrow \quad \underline{b^2 > 4mk}$$

In questo caso le due radici α_1 e α_2 sono reali ed entrambe negative, la soluzione in questo caso è la somma di due esponenziali decrescenti

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} = Ae^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}) \quad (25)$$



Smorzamento critico

Caso $\Delta = 0$; $\gamma^2 = \omega_0^2$ ossia $\frac{b^2}{4m^2} = \frac{K}{m} \rightarrow \underline{b^2 = 4mk}$

Le due radici α_1 e α_2 sono coincidenti e negative: $\alpha_{1,2} = -\gamma$

Si dimostra in tal caso che la soluzione diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A + Bt) \quad (26)$$

Avendo un andamento qualitativamente simile al caso precedente.



Smorzamento debole

Caso $\Delta < 0$; $\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$; ossia $\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2} \rightarrow \underline{b^2 < 4mk}$

Essendo il discriminante negativo le soluzioni saranno immaginarie

$$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega$$

$$\alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

che sostituito alla (23) ci dà

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} + Be^{(-\gamma-i\omega)t} = e^{-\gamma t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

Utilizzando la formula di Eulero $e^{\pm i\omega} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ si ha

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} e^{i\omega t} + Be^{-\gamma t} e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t} ((A+B)\cos \omega t + i(A-B)\sin \omega t)$$

Il risultato di questa espressione deve essere reale (poiché lo spostamento $x(t)$ è una grandezza reale) e questo comporta che i coefficienti A e B devono essere complessi coniugati e diversi fra loro.

Quindi si deve avere

$$A = a + ib; \quad B = a - ib \quad A = a + ib; \quad B = a - ib \quad \rightarrow A + B = 2a, \quad A - B = 2ib$$

Sostituendo nella (26) si ha

$$x(t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t + i(2ib) \sin \omega t) = e^{-\gamma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t)$$

Dove a e b sono due costanti di integrazione determinabili con la conoscenza delle condizioni iniziali, ossia della posizione e velocità all'istante $t = 0$; a tal uopo si pone:

$$2a = C_0 \sin \varphi; \quad 2b = C_0 \cos \varphi$$

dove ora C_0 è una costante che non rappresenta più la posizione iniziale ma è ad essa legata dalla relazione

$$C_0 = x(0) \sin \varphi,$$

Arriviamo così alla soluzione canonica:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t \sin \varphi + \sin \omega t \cos \varphi)$$

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi) \quad (27)$$

Con le costanti di integrazioni C_0 e φ . La fase istantanea è: $\theta(t) = (\omega t + \varphi)$ indica il punto dell'oscillazione in cui si trova in corpo oscillante al tempo t.

$$\text{Ad esempio se } \varphi = 0 \text{ si ha } x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t) \rightarrow x(0) = 0$$

ci dice che l'oscillatore inizia il moto dall'origine, se invece lo sfasamento iniziale è di 90° $\varphi = \pi / 2$ si ha

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \pi / 2) = C_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t) \rightarrow x(0) = C_0$$

l'oscillatore inizia il moto dal punto di massima elongazione (ampiezza iniziale = C_0).

la costante C_0 rappresenta l'ampiezza iniziale "massima possibile" dell'oscillazione in assenza di smorzamento. Essa è anche nota come "ampiezza iniziale modulata": il valore massimo dell'ampiezza che l'oscillazione avrebbe all'istante iniziale $t=0$ se non fosse per il termine esponenziale di smorzamento.

Nel grafico della funzione $x(t)$, la fase si può interpretare come lo sfasamento tra l'oscillazione attuale e un'oscillazione di riferimento (come $\sin(\omega t)$ senza fase iniziale).



Concludendo notiamo come l'attrito viscoso riduce la pulsazione rispetto al caso libero. La (26) rappresenta una sinusoide di ampiezza $x_0 e^{-\gamma t}$, cioè di ampiezza decrescente esponenzialmente con il tempo.

Esempio 4

Un blocco di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ è collegato a una molla ideale di costante elastica $k = 100 \text{ N/m}$ e può oscillare orizzontalmente su una superficie senza attrito. Il blocco è immerso in un mezzo viscoso che esercita una forza di smorzamento proporzionale alla velocità, di forma $F_v = -bv$, con $b = 1 \text{ kg/s}$.

- Calcola la frequenza angolare naturale dell'oscillatore (in assenza di smorzamento) e il coefficiente di smorzamento critico b_{crit} .
- Determina la frequenza angolare dell'oscillatore smorzato.
- Trova l'andamento della posizione $x(t)$ nel tempo se il blocco viene spostato di una distanza $x_0 = 0.1 \text{ m}$ dalla posizione di equilibrio e poi rilasciato senza velocità iniziale.
- Calcola il tempo $t_{1/2}$ dopo il quale l'ampiezza si riduce a metà rispetto al valore iniziale x_0 .

Per risolvere questo banale esercizio è sufficiente applicare le varie formule direttamente.

La frequenza naturale dell'oscillatore è

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.5}} = 14.14 \text{ s}^{-1}$$

Il coefficiente di smorzamento critico vale

$$b_{\text{rit}} = 2m\omega_0 = 2 \cdot 0.5 \cdot 14.14 = 14.14 \text{ kg/s}$$

La frequenza angolare dell'oscillatore immerso nel mezzo viscoso vale

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{14.14^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0.5}\right)^2} = 14.10 \text{ s}^{-1}$$

L'andamento nel tempo della posizione dell'oggetto è data dalla relazione (26)

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

che nel nostro caso, essendo la fase iniziale pari a zero, diventa

$$x(t) = x_0 e^{-8b/2m t} \cos \omega t = 0.1 e^{-(1/2 \cdot 0.5)t} \cos(14.10t) = 0.1 e^{-t} \cos(14.10t)$$

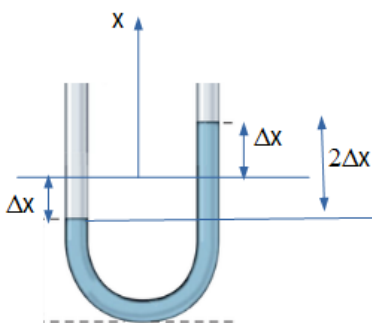
Il tempo $t_{1/2}$ è il tempo per cui l'ampiezza $x(t)$ si riduce della metà del suo valore iniziale. Ricordando che l'ampiezza del moto oscillatorio è dato dal fattore $x_0 e^{-(b/2m)t}$, si ha

$$x(t_{1/2}) = \frac{1}{2} x_0 = x_0 e^{-(b/2m)t_{1/2}} \rightarrow t_{1/2} = \frac{2m}{b} \log 2 = \frac{2 \cdot 0.5}{1} 0.69 = 0.69 \text{ s}$$

N.B Si pensi ad esempio all'ammortizzatore delle automobili, esso è una molla (con un opportuno valore della costante elastica) immersa in un fluido con opportuna viscosità tale che quando è sollecitata non compia oscillazioni, anzi si vuole proprio che lavori in regime di smorzamento critico in modo da portarsi a zero più velocemente possibile.

Esempio 5

Un tubo di vetro a sezione costante ($S = 1 \text{ cm}^2$) è piegato ad U: esso è disposto verticalmente e contiene una massa m d'acqua, che occupa la lunghezza di $L = 1 \text{ m}$. In uno dei due rami il livello d'acqua viene abbassato di $h = 10 \text{ cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio con una opportuna pressione che all'istante $t = 0 \text{ s}$ viene annullata. Ricavare l'equazione del moto della massa d'acqua. Supponiamo poi che la massa d'acqua nel suo moto oscillatorio che si instaura sia sottoposta ad attrito proporzionale alla velocità con coefficiente $b = 0.6 \text{ kg/s}$. Verificare in queste condizioni che il moto risulta debolmente smorzato e scrivere la nuova equazione del moto.



La massa d'acqua è $m = \rho V = \rho(S \cdot L) = 10^3(10^{-4} \cdot 1) = 0.1 \text{ kg}$

Quando il livello dell'acqua è spostato di un dislivello Δx rispetto alla posizione di equilibrio, si instaura una forza di richiamo dovuta alla differenza di pressione tra i due rami. Questa forza è causata dalla differenza di peso delle colonne d'acqua nei due rami del tubo, e può essere espressa come (ricordando che la pressione idrostatica di un liquido di altezza h è $P = \rho gh$)

$$F = \Delta P \cdot S = \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S$$

Questa forza di richiamo è a tutti gli effetti una forza elastica, per cui possiamo scrivere

$$F = -k\Delta x \equiv \rho g \cdot 2\Delta x \cdot S \rightarrow$$

$$k = 2\rho g S = 2 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10^{-4} = 1.96 \text{ N / m}$$

L'equazione del moto è

$$F \equiv m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \Delta x; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2g}{L} \Delta x = 0$$

Questa è l'equazione differenziale di un'oscillazione armonica semplice, con pulsazione naturale:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.96}{0.1}} = 4.43 \text{ s}^{-1} \text{ e periodo}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{1.96}} = 1.42 \text{ s}$$

Si osservi che questo periodo è uguale a quello di un pendolo semplice lungo $L/2$.

La cui soluzione come noto è

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Con velocità data da

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega_0 t + \varphi)] = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Con A e φ da determinarsi dalle condizioni iniziali che sono $x(0) = h$; $v(0) = 0$

$$x(0) = h = A \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = A \cos \varphi = 0.1 \text{ m}$$

$$v(0) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0$$

Dalla seconda si vede che dovendo essere nullo il prodotto, l'unico termine che può assumere il valore nullo è il seno, per cui dovrà essere $\varphi = 0$ ed allora dalla prima equazione si ha

$$A \cos 0^\circ = 0.1 \rightarrow A = 0.1 \text{ m} \quad \text{e l'equazione del moto, senza attrito, diventa}$$

$$x(t) = 0.1 \cos(4.43t)$$

In presenza di attrito al fine di determinare, in quale dei tre casi discussi sopra si ricade, applichiamo i criteri visti sopra, si ha:

$$b = 0.6; \quad b^2 = 0.36$$

$$4km = 4 \cdot 1.96 \cdot 0.1 = 0.78 \rightarrow b^2 < 4km$$

Quindi siamo nel caso di smorzamento debole.

Ricaviamo la pulsazione

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0.6}{2 \cdot 0.1} = 3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{4.43^2 - 3^2} = 3.26 \text{ s}^{-1}$$

L'equazione del moto, come visto sopra, in questo caso è

$$x(t) = C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)$$

E la velocità è

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (C_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega t + \varphi)) = C_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]$$

Troviamo le due costanti imponendo $x(0) = h$ e $v(0) = 0$.

$$x(0) = C_0 \sin \varphi = h$$

$$v(0) = C_0 [-\gamma \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)] = 0$$

Risolvendo questo sistema si ottiene

$$C_0 = 0.136 m$$

$$\varphi = 0.827^{rad}$$

L'equazione del moto è

$$x(t) = 0.136 e^{-3t} \sin(\omega t + 0.827^{rad})$$

Notiamo che la costante di tempo dell'esponenziale $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{3} = 0.33 s$ è molto più piccola del

periodo delle oscillazioni smorzate $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.26} = 1.93 s$ per cui ad esempio dopo un tempo pari essendo $T > 5\tau = 1.65 s$ il moto è praticamente terminato.

Caso $n = 1/2$

L'equazione del moto, nel caso di assenza di una forza attiva, è

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b\sqrt{v} \quad (28)$$

La forza di attrito viscoso, di solito, è proporzionale alla velocità dell'oggetto in movimento attraverso un fluido, secondo la legge di Stokes, oppure al quadrato della velocità nei regimi turbolenti. Tuttavia, esistono condizioni particolari in cui l'attrito può essere proporzionale alla radice quadrata della velocità. Questo si verifica in situazioni intermedie tra il regime laminare e il regime turbolento, chiamato regime di transizione.

Dettagli del regime di transizione

In un fluido, il passaggio tra il regime laminare e quello turbolento avviene per numeri di Reynolds intermedi, solitamente attorno a $Re \approx 1000$. In questa fase, il comportamento dell'attrito viscoso è più complesso e la sua dipendenza dalla velocità non è lineare. La dipendenza della forza di attrito può variare con la radice quadrata della velocità per:

Scorrimento su superfici porose o ruvide: quando la superficie di contatto non è completamente liscia, il flusso attorno all'oggetto si distorce, causando una dipendenza non lineare che talvolta è approssimabile alla radice quadrata della velocità.

Fluido a densità variabile: in alcuni fluidi con densità non uniforme o variabile in funzione della velocità (come schiume o liquidi non newtoniani), il rapporto tra attrito e velocità può risultare alterato.

Flusso con oscillazioni: in presenza di flussi oscillanti o con piccoli vortici localizzati, l'attrito può assumere una forma intermedia con dipendenza non lineare, dove il termine radice quadrata può comparire come approssimazione.

Flusso prossimo alla separazione: nelle zone dove il flusso inizia a distaccarsi dalla superficie (tipico di forme poco aerodinamiche), la forza di attrito si discosta dal comportamento lineare o quadratico, tendendo verso una proporzionalità alla radice quadrata della velocità.

Modelli di attrito viscoso nel regime di transizione

In questi casi particolari, la modellazione della forza di attrito può richiedere correzioni empiriche, che talvolta includono un termine in $v^{1/2}$ tuttavia, la dipendenza esatta dell'attrito viscoso in questi casi è difficile da modellare con precisione teorica e viene spesso determinata sperimentalmente.

Integrando la (28) si ha

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -b\sqrt{v}; \quad \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt; \quad 2\sqrt{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{b}{m} t \\ 2\sqrt{v} &= 2\sqrt{v_0} - \frac{b}{m} t; \quad \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{b}{2m} t; \\ \sqrt{v} &= \sqrt{v_0} - \frac{t}{2\tau} \quad (\tau = m/b) \quad (29) \end{aligned}$$

Al fine di ottenere la $v(t)$ osserviamo che l'equazione non può essere elevata al quadrato perché si perderebbe dell'informazione! Occorrerà invece considerare che la $v(t)$ può essere pensata provenire dall'estrazione di radice della seguente espressione:

$$v = \left(\sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t \right)^2 \rightarrow \sqrt{v} = \sqrt{v_0} - \frac{1}{2\tau} t$$

Analizziamo l'aspetto matematico di questa relazione. Poniamo per compattezza di scrittura

$$v = y, \quad t = x; \quad \sqrt{v_0} = a, \quad \frac{1}{2\tau} = b \quad \text{avendosi}$$

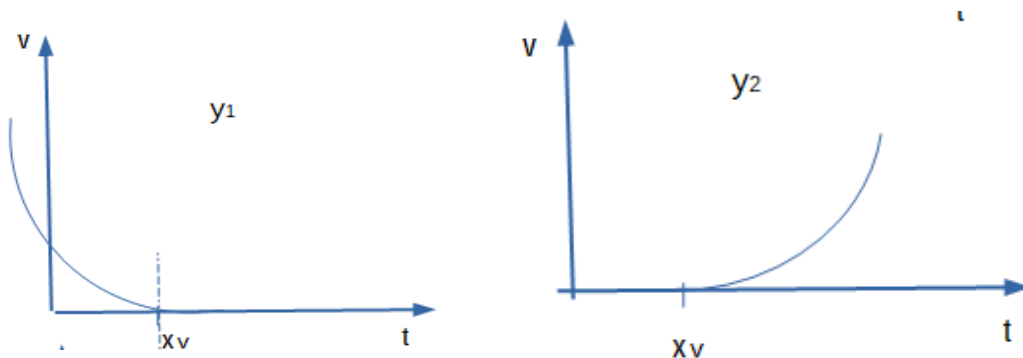
$$y = (a - bx)^2$$

Estraendo la radice quadrata abbiamo due funzioni

$$y_1 \rightarrow +\sqrt{y} = a - bx \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y \geq 0$$

$$y_2 \rightarrow -\sqrt{y} = a - bx \quad \text{ossia} \quad \sqrt{y} = bx - a \rightarrow y = bx^2 - 2abx + a^2 \quad \text{definita per } y < 0$$

Graficamente è immediato vedere che esse rappresentano le due metà di una parabola avente vertice ($x_v = a/b$; $y_v = 0$)



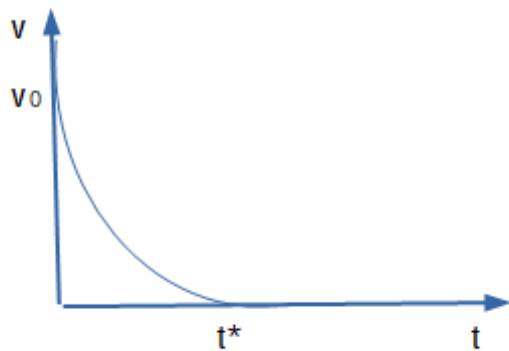
Il vertice è allora

$$x_{\text{Vertice}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{v_0}}{1/2\tau} = 2\tau\sqrt{v_0}$$

L'intervallo dei valori della velocità è $0 \leq v \leq v_0$.

E' ovvio che dobbiamo scartare la y_2 in quanto fisicamente significherebbe che il corpo una volta arrestatosi, di propria iniziativa, cioè senza nessuna forza agente, si rimetta in moto. Dunque la nostra funzione è

$$v(t) = \frac{1}{4\tau^2} t^2 - \frac{\sqrt{v_0}}{\tau} t + v_0; \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2\tau\sqrt{v_0} \quad (29)$$



Dove $t^* = 2\tau\sqrt{v_0}$ è il tempo di arresto.

Determiniamo l'espressione dei $v(x)$.

$$m \frac{dv}{dt} = -b\sqrt{v}; \quad m \frac{dv}{dx} v = -b\sqrt{v}; \quad \frac{v}{\sqrt{v}} dv - \frac{1}{\tau} x = -\frac{1}{\tau} dx; \quad \int_{v_0}^v \frac{v}{\sqrt{v}} dv = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx =$$

$$= \frac{2}{3} v^{3/2} - \frac{2}{3} v_0^{3/2} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{1}{\tau} x_0$$

$$\frac{2}{3} v^{3/2} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{x_0}{\tau} + \frac{2}{3} v_0^{3/2}$$

$$v^{3/2} = -\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}$$

$$v(x) = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2} \quad (30)$$

Da questa relazione possiamo determinare la distanza massima percorsa dal corpo prima di arrestarsi, basta porre $v(x) = 0$

$$0 = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}$$

$$\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right) = 0$$

$$x_{\max} = x_0 + \frac{2\tau}{3} v_0^{3/2} \quad (31)$$

Infine determiniamo l'equazione del moto

$$v(x) \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}$$

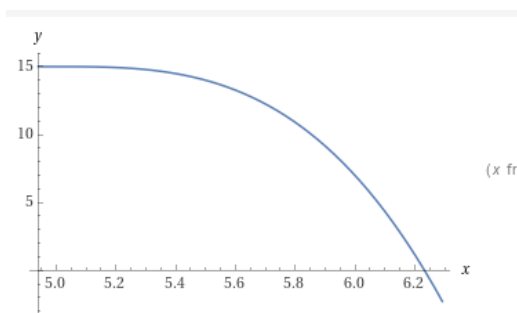
$$\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} = dt$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2\tau} x + \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2}\right)^2}} = \int_0^t dt$$

Per semplificare la scrittura poniamo

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3}{2\tau}; \quad A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2} \\
\int_{x_0}^x \frac{dx}{(A-Bx)^{2/3}} &= \int_0^t dt \\
-\frac{3}{B} \sqrt[3]{(A-Bx)} \Big|_{x_0}^x &= t \\
\sqrt[3]{(A-Bx)} - \sqrt[3]{(A-Bx_0)} &= -\frac{B}{3} t \\
\sqrt[3]{(A-Bx)} &= -\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \\
A-Bx &= \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \\
Bx &= A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \\
x(t) &= \frac{1}{B} \left\{ A - \left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3 \right\} \\
x(t) &= \frac{A}{B} - \frac{\left[-\frac{B}{3} t + \sqrt[3]{(A-Bx_0)} \right]^3}{B}; \quad \text{con } B = \frac{3}{2\tau}; \quad A = \frac{3x_0}{2\tau} + v_0^{3/2} \quad (32)
\end{aligned}$$

Il cui grafico qualitativo è il seguente.



Per controprova si vede che sostituendo nella (32) $t = t_{\max} = 2\tau v_0$ si riottiene la distanza massima data dalla (31).

Se è presente una forza gravitazionale l'equazione del moto diventa

$$m \frac{dv}{dt} = mg - b\sqrt{v} \quad \text{integrando si ha}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v} : \quad \frac{dv}{\left(g - \frac{1}{\tau} \sqrt{v}\right)} = dt; \quad \tau \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = dt; \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{(g\tau - \sqrt{v})} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) \Big|_{v_0}^v = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) - 2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) = \frac{1}{\tau} t$$

$$2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v}) + \sqrt{v}) = \frac{1}{\tau} t + \left[2(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \right]$$

$$(g\tau \log(g\tau - \sqrt{v(t)}) + \sqrt{v(t)}) = \frac{1}{2\tau} t + (g\tau \log(g\tau - \sqrt{v_0}) + \sqrt{v_0}) \quad (33)$$

Quest'ultima relazione ci dice come varia la velocità nel tempo, solo che non è possibile esplicitarla nella forma $v(t) = f(t)$.

Per ottenere l'equazione del moto basta integrarla!!!

Caso $n = 2$

La relazione di dipendenza quadratica dalla velocità per moti viscosi viene utilizzata in fluidodinamica quando il regime di moto è caratterizzato da una dominanza degli effetti inerziali rispetto a quelli viscosi, tipicamente associata a numeri di Reynolds elevati. Questo tipo di relazione è generalmente espresso come una forza resistiva proporzionale al quadrato della velocità:

$$F_R = \frac{1}{2} \rho C_x A v^2$$

Dove ρ è la densità del fluido, C_x è il coefficiente di resistenza aerodinamica già descritto nel punto 2 della nota iniziale, A è un'area di riferimento, spesso coincide con la sezione trasversale del corpo mentre v è la velocità del corpo rispetto al fluido. Tale relazione viene usata nel caso di numeri di Reynolds elevati, nel qual caso gli effetti inerziali del flusso diventano predominanti ed il moto è generalmente turbolento e la relazione lineare con la velocità diviene trascurabile. Inoltre viene usata per oggetti come automobili, aeroplani, proiettili o veicoli spaziali in atmosfera, dove la resistenza quadratica domina perché la velocità è sufficientemente elevata.

Come per gli altri casi partiamo supponendo assente la forza attiva sul corpo.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{b}{m} dt \equiv -\frac{1}{\tau} dt$$

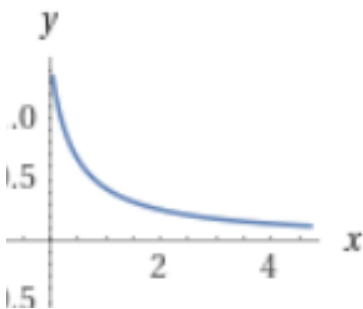
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{1}{\tau} t$$

$$-\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{\tau} t$$

$$v(t) = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} \quad (34)$$

Il cui andamento qualitativo è il seguente



La velocità in funzione dello spazio è

$$m \frac{dv}{dx} v = -bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\tau} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} dx$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -\frac{1}{\tau} (x - x_0)$$

$$v(x) = v_0 e^{-(x-x_0)/\tau} \quad (35)$$

L'equazione del moto è

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \frac{v_0 \tau}{\tau - v_0 t} dt$$

$$x - x_0 = -\frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} \Big|_0^t$$

$$x(t) = x_0 - \frac{v_0 \tau \log(\tau - v_0 t)}{v_0} + \frac{v_0 \tau \log \tau}{v_0}$$

$$x(t) = x_0 - \tau \log(\tau - v_0 t) + \tau \log \tau$$

$$x(t) = x_0 + \log \left(\frac{\tau}{\tau - v_0 t} \right) \quad (36)$$

Vediamo ora il caso in cui sia presente una forza agente sul corpo, che supponiamo essere la forza peso.

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \quad (37)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} = dt$$

$$\frac{\tau dv}{g\tau - v^2} = dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

Avendo ricordato la relazione (3) che ora vale $v_L = (g\tau)^{1/2}$.

L'integrale vale

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v + v_L)}{(v - v_L)} \right| \Bigg|_{v_0}^v = \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| \quad \text{per cui abbiamo}$$

$$\frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| - \frac{1}{2v_L} \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right| = \frac{1}{\tau} t$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = \frac{2v_L}{\tau} t + \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\text{ponendo } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\log \left| \frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} \right| = at + b$$

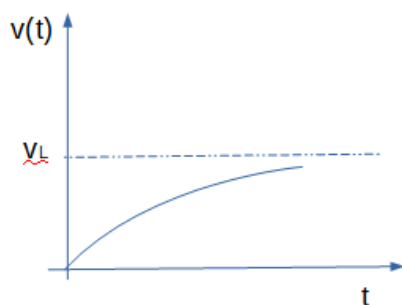
$$\frac{(v_L + v)}{(v_L - v)} = e^{at+b}$$

Con qualche ulteriore passaggio si arriva all'espressione della velocità in funzione del tempo.

$$v(t) = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} \quad (38)$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

Il cui andamento è il seguente



La (38) può anche essere espressa in termini di tangente iperbolica (ricordando che

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$) nel seguente modo.

$$v(t) = v_L \tanh \left[\left(\frac{v_L}{\tau} t \right) + \tanh^{-1} \frac{v_0}{v_L} \right] \quad (39)$$

Nel caso $v_0 = 0$ diventa.

$$v(t) = v_L \tanh \left(\frac{v_L}{\tau} t \right) \quad (39')$$

Ricaviamo la velocità in funzione dello spazio.

$$m \frac{dv}{dx} v = mg - bv^2$$

$$\frac{dv}{dx} v = g - \frac{1}{\tau} v^2$$

$$\frac{dv}{g - \frac{1}{\tau} v^2} v = dx$$

$$\frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} dx$$

Ricordando che l'integrale vale

$$\int \frac{xdx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \log |a^2 - x^2| + C \text{ si ha}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{v}{v_L^2 - v^2} dv = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^x dx$$

$$-\frac{1}{2} \log(v_L^2 - v^2) + \frac{1}{2} \log(v_L^2 - v_0^2) = \frac{1}{\tau} x - \frac{1}{\tau} x_0$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -\frac{2}{\tau} x + \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

$$\log(v_L^2 - v^2) = -ax + b$$

$$(v_L^2 - v^2) = e^{-ax+b}$$

$$v(x) = \sqrt{v_L^2 - e^{-ax+b}} \quad (40)$$

$$\text{con } a = \frac{2}{\tau}; \quad b = \frac{2}{\tau} x_0 + \log(v_L^2 - v_0^2)$$

Vediamo che per x grande la velocità tende v_L , come ci si aspettava.

Il grafico è del tutto simile a quello precedente.

Infine ricaviamo la legge oraria, riprendendo la (38).

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1}$$

$$\text{con } a = \frac{2v_L}{\tau}; \quad b = \log \left| \frac{(v_L + v_0)}{(v_L - v_0)} \right|$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_L \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = v_L \int_0^t \frac{e^{at+b} - 1}{e^{at+b} + 1} dt$$

$$x - x_0 = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t \right]_0^t = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right]$$

$$x(t) = v_L \left[\frac{2}{a} \log(e^{at+b} + 1) - t - \frac{2}{a} \log 2 \right] + x_0 \quad (41)$$

A cui si vede che per $t = 0$ si ha $x(0) = x_0$ mentre per t grande $x(t)$ cresce praticamente in modo lineare con il tempo.

In termini della costante di tempo si ha:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{(2t/\tau)+b} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (42)$$

Nel caso $v_0 = 0$ si ha $b = 0$ e l'espressione diventa:

$$x(t) = v_L \left[\tau \log(e^{2t/\tau} + 1) - t - \tau \log 2 \right] + x_0 \quad (43)$$

Se $v_0 = 0$ in termini di coseno iperbolico dalla (39') si ha:

$$x(t) = x_0 + \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \quad (43')$$

Esempio 6

Si abbiano due sfere, una di legno ed una di acciaio, con densità rispettivamente di 500 e 8000 kg/m³ e raggio di 1 cm, in caduta libera; assumendo la densità dell'aria pari a 1.23 kg/m³ ed un coefficiente di penetrazione $C = 0.5$, si calcoli la velocità limite delle sfere ed a quale distanza di caduta si raggiungono tali valori, rappresentare inoltre il grafico della legge oraria, assumendo che partano da ferme da un'altezza di 10 metri.

Consideriamo che per oggetti macroscopici e/o velocità abbastanza grandi la forza di resistenza viscosa si può scrivere come $F_R = \frac{1}{2} C \rho S v^2$

Dove ρ è la densità del fluido, S è la "sezione frontale" (per una sfera di raggio R è $S = \pi R^2$) e C è il "coefficiente di penetrazione" (per le automobili è chiamato comunemente C_x) che in generale dipende dalla velocità ($C=C(v)$) ma che si può di norma approssimare con una costante.

Scriviamo l'equazione del moto

$$ma = mg - \frac{1}{2} C \rho S v^2 \quad (a)$$

Quando all'aumentare della velocità di caduta F_R raggiunge un valore uguale alla forza peso $ma = 0$ e si raggiunge la velocità limite che vale:

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}$$

Notiamo preliminarmente che sarà lecito trascurare la resistenza dell'aria quando la forza peso predomina sulla forza di attrito, ossia quando

$$F_R \equiv \frac{1}{2} C \rho S v^2 \ll mg \rightarrow v \ll \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \equiv v_L \quad (b)$$

Per capire se è lecito trascurare la resistenza dell'aria, senza risolvere l'equazione (a), si può calcolare la velocità massima che sarebbe raggiunta in assenza d'aria e verificare se questa velocità soddisfa la (b). Se ciò avviene, è lecito trascurare la presenza dell'aria, altrimenti bisogna aspettarsi correzioni più o meno grandi a seconda di quanto è violata la (b).

E' facile convincersi che $v \rightarrow v_L$ indipendentemente dalla velocità iniziale, perciò ogni corpo, libero di muoversi in aria, raggiunge una velocità limite se ne ha il tempo, ovvero se cade da un'altezza sufficiente. Ora "lavoriamo" sulla (b) per esprimerla in funzione del raggio e densità delle sfere.

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} V_{sfera} g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{2\rho_{sfera} \frac{4}{3} \pi R^3 g}{C\rho_{aria} \pi R^2}} = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}}$$

Da questa relazione vediamo che v_L aumenta con l'aumentare delle dimensioni (del raggio della sfera) e della sua densità: i corpi più grandi e/o pesanti cadono più velocemente.

Calcoliamo le velocità limite per le due sfere.

Sfera di legno:

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 500}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 14.6 \text{ m/s} = 52.5 \text{ km/h}$$

Sfera di acciaio

$$v_L = \sqrt{\frac{8Rg\rho_{sfera}}{3C\rho_{aria}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 8000}{3 \cdot 0.5 \cdot 1.23}} = 58.3 \text{ m/s} = 209.9 \text{ km/h}$$

Nel vuoto, quindi senza forza di attrito dell'aria la velocità limite si raggiunge dopo una distanza data dalla relazione del moto rettilineo accelerato $v^2 = 2ax$ (nel nostro caso $a = g$),

Sfera di legno

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{14.6^2}{2 \cdot 9.81} = 10.8 \text{ m}$$

Sfera di acciaio

$$x_{velocità\ limite} = \frac{v_L^2}{2g} = \frac{58.3^2}{2 \cdot 9.81} = 173 \text{ m}$$

Quindi per dar modo alla sfera di legno di raggiungere la velocità limite essa deve cadere da almeno una altezza di 10.8 m, perciò se cade da un'altezza inferiore è lecito trascurare la resistenza dell'aria, stesso discorso, con numeri diversi, vale per la sfera di acciaio.

L'equazione del moto, essendo nulla la velocità iniziale è data dalla (43').

Si noti che dall'equazione (39') risulta che il tempo occorrente per raggiungere la velocità limite è infinito, infatti:

$$v(t) = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) \rightarrow v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right) = 1$$

Come noto la tangente iperbolica tende ad 1 quando il suo argomento tende ad infinito.

Ma possiamo calcolare il tempo necessario per raggiungere ad esempio 0.99 v_L , usando

$$\text{l'uguaglianza } \frac{v_L}{\tau} = \frac{g}{v_L};$$

$$v(t) \equiv 0.99 v_L = v_L \tanh\left(\frac{v_L}{\tau} t\right); \quad \tanh\left(\frac{g}{v_L} t\right) = 0.99 \rightarrow \frac{g}{v_L} t = 2.65$$

Sfera di legno

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 14.6}{9.81} = 3.94 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.8}{9.81}} = 1.48 \text{ s}$$

Sfera di acciaio

$$t_{vel\ limite} = \frac{2.65 \cdot v_L}{g} = \frac{2.65 \cdot 58.3}{9.81} = 15.7 \text{ s} \quad t_{senza\ attrito} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 173}{9.81}} = 5.9 \text{ s}$$

Infine calcoliamo quale distanza percorrono le sfere con tali tempi.

Sfera di legno

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{14.6^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{14.6} 3.94)) \\
 &= 21.73 \log(\cosh(2.65)) = 21.73 \log(1.63) = 10.6 m
 \end{aligned}$$

Sfera di acciaio

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \tau \log(\cosh(\frac{v_L}{\tau} t)) \equiv \frac{v_L^2}{g} \log(\cosh(\frac{g}{v_L} t)) = \frac{58.3^2}{9.81} \log(\cosh(\frac{9.81}{58.3} 15.7)) = \\
 &= 346.5 \log(\cosh(2.64)) = 346.5 \log(1.63) = 169 m
 \end{aligned}$$

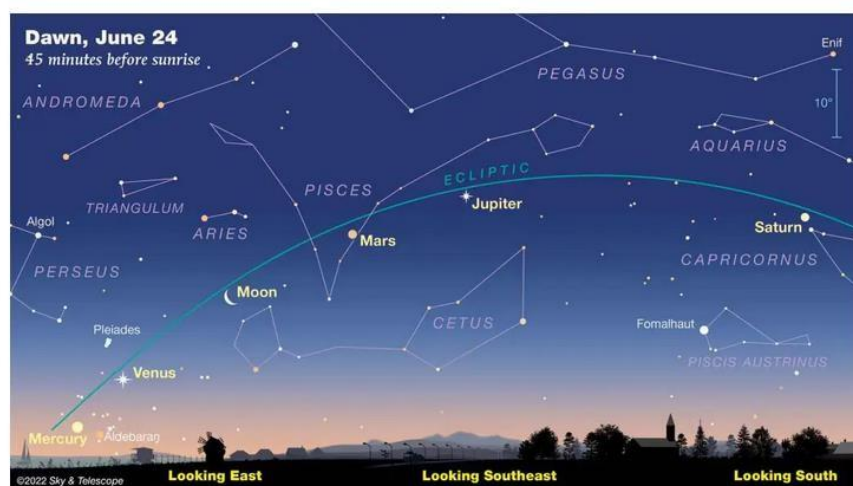
Appunti sulla legge gravitazionale

a cura di Giancarlo Buccella

Il moto dei corpi celesti ha affascinato l'umanità sin dagli albori della civiltà. Uno dei processi più interessanti nella storia della scienza è stato l'evoluzione della nostra comprensione del moto dei pianeti.

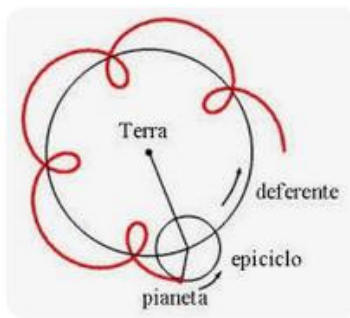
I Greci amavano considerare la Terra come il centro dell'Universo. Essi supponevano che la Terra fosse il centro geometrico e che tutti i "corpi celesti" si muovessero attorno ad essa. I corpi celesti conosciuti a quel tempo erano quelli visibili ad occhio nudo: Luna, Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno, con le stelle fisse disposte su di una sfera più esterna.

Nella illustrazione seguente vediamo una congiunzione non usuale (avvenuta a giugno 2022) di tutti e cinque i pianeti disposti in ordine crescente di distanza dal Sole



La prima ipotesi sul moto planetario fu quella secondo la quale i pianeti (dal greco "planetes" che significa vagabondo, errante) descrivono orbite circolari concentriche aventi la Terra come centro. Tuttavia dalle prime osservazioni ci si accorse che tale modello non si accordava con il moto osservato.

La geometria del moto planetario divenne sempre più complesso, per tener conto delle osservazioni. Nel II secolo d.C., l'astronomo Tolomeo di Alessandria sviluppò la teoria degli epicicli. Nel caso più semplice si supponeva che il pianeta descrivesse con moto uniforme una circonferenza chiamata *epiciclo*. Il centro dell'epiciclo, a sua volta, si muoveva su una circonferenza più grande, concentrica con la Terra, chiamata *deferente*. La traiettoria risultante del pianeta è quindi un'epicicloide (vedi figura seguente).



Questa descrizione sopravvisse fino al XVI secolo, quando Niccolò Copernico (1473 – 1543) sviluppò un metodo differente. Egli andava cercando una soluzione più semplice, e propose quindi di descrivere il moto non centrato sulla Terra ma sul Sole, tale modello, detto *eliocentrico*, non era nuovo, fu infatti proposto da Aristarco di Samo attorno al III secolo a.C. Inoltre Aristarco concordava con Eraclide Pontico nell'attribuire alla Terra anche un moto di rotazione diurna attorno ad un asse inclinato rispetto al piano dell'orbita intorno al Sole, giustificando così l'esistenza delle stagioni. La teoria eliocentrica fu rifiutata con forza da Platone (428 - 348 a.C.) e dal suo allievo Aristotele (384 - 322 a.C.), e fu respinta quattro secoli dopo Aristarco, anche da Claudio Tolomeo, le cui concezioni dominarono incontrastate la tarda antichità e il medioevo.

Il sistema copernicano può sintetizzarsi in sette assunti, così come dal medesimo autore enunciati nel compendio *De revolutionibus orbium coelestium* (Sulle rivoluzioni delle sfere celesti) ritrovato e pubblicato nel 1878. Steso tra il 1507 e il 1512, nel "*Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*", Copernico presentò le sette *petitiones* (cioè i sette postulati della teoria) che dovevano dare vita a una nuova astronomia:

1. Non vi è un unico punto centro delle orbite celesti e delle sfere celesti.
2. Il centro della Terra non è il centro dell'Universo, ma solo il centro della massa terrestre e della sfera lunare.
3. Tutte le sfere ruotano attorno al Sole, che quindi è in mezzo a tutte, e il centro dell'Universo si trova vicino a esso.
4. Il rapporto della distanza tra il Sole e la Terra con l'altezza del firmamento, è tanto più piccolo di quello tra il raggio della Terra e la distanza di questa dal Sole, che, nei confronti dell'altezza del firmamento, tale distanza è impercettibile (non viene quindi percepito alcun movimento apparente nelle stelle fisse).
5. Qualsiasi movimento appaia nel firmamento non appartiene a esso, ma alla Terra; pertanto la Terra, con gli elementi contigui, compie in un giorno un intero giro attorno ai suoi poli fissi, mentre il firmamento resta immobile, inalterato con l'ultimo cielo.
6. Qualunque movimento ci appaia del Sole, non appartiene a esso, ma dipende dalla Terra e dalla nostra sfera, insieme alla quale noi ruotiamo intorno al Sole come qualsiasi altro pianeta, e così la Terra compie più movimenti.
7. Per i pianeti appare un moto retrogrado e un moto diretto; ciò in realtà non dipende da loro, ma dalla Terra; pertanto, il moto di questa sola basta a spiegare tante irregolarità celesti.

Queste asserzioni rappresentavano l'esatto opposto di quanto affermava la teoria geocentrica, allora comunemente accettata. Copernico fu molto attento a non assumere atteggiamenti rivoluzionari, né con la sua condotta di vita, né nelle sue opere. Egli costruì una nuova cosmologia partendo dagli stessi dati dell'astronomia tolemaica e rimanendo ancorato ad alcune tesi fondamentali dell'aristotelismo: 1) perfetta sfericità e perfetta finitezza dell'Universo; 2) immobilità del Sole data dalla sua natura divina; 3) centralità del Sole dovuta a migliore posizione da cui "può illuminare ogni cosa simultaneamente" (Copernico).

La presunta maggiore semplicità e armonia del sistema (argomenti con cui Copernico e il discepolo Giorgio Gioacchino Retico difendevano la visione copernicana) era però più apparente che reale. Per non contraddire le osservazioni Copernico fu costretto a non fare coincidere il centro dell'Universo con il Sole, ma con il centro dell'orbita terrestre; dovette reintrodurre epicicli ed eccentrici, come Tolomeo; dovette attribuire alla Terra, oltre al moto di rivoluzione attorno al Sole e a quello di rotazione attorno al proprio asse, un terzo moto (*declinationis motus*), per rendere conto dell'invariabilità dell'asse terrestre rispetto alla sfera delle stelle fisse.

Benché all'epoca di Copernico il sistema eliocentrico e quello geocentrico fossero sostanzialmente equivalenti in termini di complessità e di capacità predittiva, il grande vantaggio del sistema copernicano fu l'eliminazione di un epiciclo dalle orbite di tutti i pianeti. Nel sistema copernicano questo epiciclo è dovuto al fatto che le orbite sono osservate dalla Terra, la quale a sua volta gira attorno al Sole. L'osservazione che i pianeti hanno un epiciclo in comune, dovuto all'orbita della Terra, apriva tra l'altro la possibilità di misurare le distanze dei pianeti dal Sole (o, meglio, il loro rapporto con il raggio dell'orbita terrestre) con il metodo della parallasse. Copernico volle anche eliminare l'equante di Tolomeo; poiché le orbite sono ellittiche, tuttavia, dovette comunque introdurre degli epicicli. Solo con Keplero questi ultimi non saranno più necessari.

Ribadiamo che Copernico propose la sua teoria basandosi non su dati osservativi ma solo sull'assunto che il moto doveva essere più semplice di quello geocentrico.

Principale sostenitore del modello eliocentrico fu Johannes Kepler (1571 – 1630) il quale nel 1596 pubblicò l'opera *Mysterium Cosmographicum*, nella quale tentò una prima descrizione del moto planetario, il cui scopo non era quello di difendere il sistema copernicano, ma piuttosto quello di dimostrare che per la creazione del mondo e la disposizione dei cieli, Dio si è ispirato ai cinque solidi regolari che hanno goduto di così grande fama da Pitagora e Platone in poi: il cubo, il tetraedro, il dodecaedro, l'icosaedro, l'ottaedro. Keplero si interroga circa le cause del numero, delle dimensioni e dei moti delle orbite, e sostiene che questa ricerca sia fondata sulla corrispondenza tra i tre "corpi" immobili dell'Universo (Sole, stelle fisse, spazio intermedio) e Padre, Figlio e Spirito Santo (la Trinità). Le leggi della struttura del cosmo vengono ricavate circoscrivendo e inscrivendo le orbite dei pianeti nelle varie figure solide, a partire dalla Terra, che è l'unità di misura di tutte le orbite.

Le basi per le sue scoperte astronomiche furono gettate nel 1609, quando pubblicò il suo capolavoro *Astronomia nova*, in cui formulò le sue prime due leggi. Nel 1618 Keplero scoprì la terza legge, che rese nota l'anno dopo nell'opera *Harmonices Mundi*. Keplero a differenza di Copernico basò le sue "leggi" su dati osservativi e non su speculazioni teoriche. Ciò fu possibile grazie alle numerose e precise osservazioni di Tycho Brahe (1546 – 1601). Il più grande merito di Brahe rimane quello di aver impostato una precisa metodologia scientifica riguardo all'astronomia, servendosi di osservazioni rigorose e sistematiche, tramite l'impiego di idonea strumentazione. Brahe fu uno straordinario osservatore dell'era pre-telescopio: le sue osservazioni delle posizioni stellari e planetarie raggiunsero un'accuratezza impareggiabile per i suoi tempi (la nascita del telescopio risale a Galileo (1607)).

Le tre leggi di Keplero (leggi empiriche) sono:

- I) I pianeti descrivono orbite piane ed ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.
- II) Il vettore posizione di ogni pianeta rispetto al Sole descrive aree uguali della sua orbita ellittica in tempi uguali. Legge delle aree.
- III) I cubi delle distanze medie dei pianeti dal Sole sono proporzionali ai quadrati dei periodi di rivoluzioni. $R^3 = C P^2$, dove C è una opportuna costante di proporzionalità.

Nella seguente tabella vengono riportati i dati più significativi nel sistema solare.

Body	Equatorial radius (m)	Mass (kg)	Period of rotation (s)	Semi-major axis of orbit (m)	Period of orbital motion (s)	Eccentricity of orbit
Sun	6.69×10^8	1.99×10^{30}	2.4×10^6	—	—	—
Mercury	2.44×10^6	3.30×10^{23}	5.07×10^6	5.79×10^{10}	7.60×10^6	0.2056
Venus	6.05×10^6	4.87×10^{24}	2.10×10^7 †	1.08×10^{11}	1.94×10^7	0.0068
Earth	6.38×10^6	5.97×10^{24}	8.62×10^4	1.50×10^{11}	3.16×10^7	0.0167
Mars	3.39×10^6	6.42×10^{23}	8.86×10^4	2.28×10^{11}	5.94×10^7	0.0934
Jupiter	7.14×10^7	1.90×10^{27}	3.54×10^4	7.78×10^{11}	3.75×10^8	0.0483
Saturn	6.00×10^7	5.69×10^{26}	3.84×10^4	1.43×10^{12}	9.30×10^8	0.0560
Uranus	2.61×10^7	8.70×10^{25}	6.20×10^4	2.87×10^{12}	2.65×10^9	0.0461
Neptune	2.43×10^7	1.03×10^{26}	6.48×10^4	4.59×10^{12}	5.20×10^9	0.0100
Pluto	1.14×10^6	1.20×10^{22}	5.52×10^5	5.91×10^{12}	7.84×10^9	0.2484
Moon*	1.74×10^6	7.35×10^{22}	2.36×10^6	3.84×10^8	2.36×10^6	0.0550

* Orbital data of the Moon are relative to the Earth

† Venus exhibits retrograde motion

Le leggi di Keplero forniscono una descrizione del moto planetario ma non sono in grado di spiegare in base a quale legge matematica essi si muovono proprio in quel modo. Tale spiegazione fu data da Isaac Newton (1642 - 1727) con la sua teoria della gravitazione nel 1666, ma pubblicata solo 21 anni dopo, nella sua opera più importante *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, (detta usualmente: “i Principia”).

Il fatto che i pianeti descrivano un’orbita chiusa e non si allontanino indefinitamente dal Sole indica che deve agire una forza (il concetto di forza come causa del moto fu Newton stesso ad introdurlo, con le sue fondamentali tre leggi del moto che costituiscono le basi di tutta la Meccanica) di tipo attrattivo. Una forza attrattiva può dar luogo anche ad un’orbita aperta, ma una forza repulsiva non può dar luogo ad un’orbita chiusa.

Con Keplero si è giunti a formulare leggi empiriche che descrivono il moto, con Newton conosciamo le leggi che la Natura impiega per far svolgere tali moti, ad esempio la conoscenza della forza fra il Sole e i suoi pianeti ci permette di ricavare la legge del moto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e la sua traiettoria.

Vediamo come le leggi di Keplero possono essere dedotte dalla teoria e più specificamente dalla meccanica classica e dalla scoperta della legge della gravitazione universale; entrambe vedono Newton protagonista.

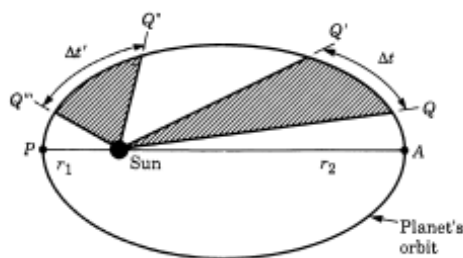
a) *Orbita piana e velocità areolare costante*

Le orbite ellittiche sono caratterizzate da una grandezza detta eccentricità. Indicando con r_1 e r_2 la distanza minima e massima del pianeta dal Sole, l’eccentricità è definita dalla seguente formula

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{r_2 - r_1}{2a} \text{ dove } 2a \text{ è la lunghezza dell’asse maggiore dell’ellisse.}$$

Dalla formula si evince che se $r_1 = r_2$ si ha $e = 0$, ossia per la circonferenza l’eccentricità vale zero. Dalla tabella precedente si vede che fatta eccezione per Mercurio e Plutone (classificato dal 2006 come pianeta nano) le orbite sono praticamente circolari.

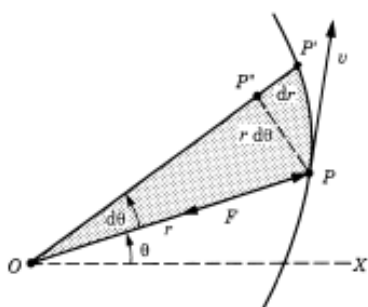
La legge aree afferma che l’area “spazzata” per unità di tempo dal raggio vettore del pianeta, relativo al Sole, per andare da Q a Q’ deve risultare uguale a quella spazzata per unità di tempo per andare da Q’’ a Q’’’, come illustrato nella seguente figura.



Cioè deve risultare

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A'}{\Delta t'}$$

Vediamo ora come da questa affermazione ne discende la costanza del momento angolare e di conseguenza il fatto che la forza associata all'interazione gravitazionale deve essere una forza di tipo centrale. Consideriamo a tal proposito una particella che descriva una traiettoria curvilinea, come quella della figura seguente.



In un piccolo intervallo di tempo dt la particella si sposta da P in P' ed il raggio vettore r descrive ("spazza") l'area tratteggiata, il cui valore è dato approssimativamente da $dA = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altezza} = \frac{1}{2} [r(r d\theta)] = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. L'area spazzata per unità di tempo è

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

La legge delle aree richiede che tale valore sia costante $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cost}$

Come noto dalla meccanica il momento angolare di una particella che descrive una traiettoria curvilinea può essere espressa come $L = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e confrontando queste due espressioni si ha

$$L = 2m \frac{dA}{dt} = \text{cost}$$

Abbiamo così dimostrato che la seconda legge di Keplero implica la costanza del modulo del momento angolare. Vale evidentemente anche il viceversa. Quindi da una proprietà della teoria – la costanza del modulo di \mathbf{L} – si deduce la legge delle aree.

La costanza del vettore momento angolare inoltre, implica che il moto sia piano.

Infatti dalla definizione del momento angolare si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e se $\mathbf{L} = \text{cost}$ ciò significa che il momento della forza (rispetto al centro della forza, ossia del Sole nel nostro caso) deve risultare nullo e questo implica che il raggio vettore e la forza siano paralleli fra loro (o più precisamente antiparalleli), quindi la forza deve essere disposta lungo la direzione congiungente il centro del Sole con il centro del pianeta, ossia deve essere radiale.

Oppure si può partire dall'assunto che la forza sia radiale e quindi constatare (scegliendo come polo il Sole) che il momento della forza è nullo, essendo per un moto radiale \mathbf{r} ed \mathbf{F} paralleli (o antiparalleli).

La costanza di \mathbf{L} implica che il moto debba essere piano, cioè deve avvenire sempre nello stesso piano. Infatti dalla relazione $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ si vede che, fissate le condizioni iniziali del raggio vettore \mathbf{r} e della q.d.m. $m\mathbf{v}$ questi

due vettori individuano un piano a cui \mathbf{L} è perpendicolare e pertanto se \mathbf{L} è fisso anche il piano resta fisso nello spazio.

Inoltre il verso di \mathbf{L} implica che il moto avvenga in un senso oppure nell'altro.

Quindi da una proprietà della teoria – la costanza di \mathbf{L} – si deduce la legge delle aree e la planarità del moto orbitale.

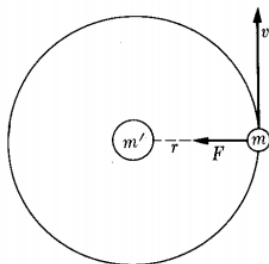
L'espressione matematica della forza, ossia che la forza oltre ad essere diretta lungo \mathbf{r} (forza radiale) dipenda esclusivamente dal suo modulo (forza centrale), e non ad esempio dall'angolo che \mathbf{r} forma con una certa direzione di riferimento) e quale tipo di dipendenza fosse, fu scoperto da Newton con la sua legge di gravitazione universale. Lo vediamo nella seguente nota.

Premessa: la terza legge di Keplero dice che per i pianeti i che orbitano intorno al sole si ha $R^3 = C P^2$ dove C è una costante. Per maggiore chiarezza (essendo la costante riferita ai moti dei pianeti che orbitano intorno al Sole) chiamiamo C costante di Keplero del Sole e la indichiamo con il pedice S .

$$C_s = \frac{r^3}{P^2}$$

(ribadiamo che in questa formula r sono i raggi medi dei pianeti del Sole e P i loro periodi).

Newton considerò per semplicità un moto circolare uniforme con la massa M (in figura indicata con m') centro delle forze, in quanto supponiamo $m \ll M$ (sistema inerziale centrato su M).



Sappiamo dalla teoria che affinché avvenga un tale moto vi deve essere una forza, detta centripeta, esercitata da M su m che deve avere la seguente espressione $F = mv^2/r$ dove v è la velocità di m ed r il suo raggio.

Pensiamo per focalizzare il discorso che m sia la massa della Terra m_T ed M la massa del Sole m_S :

$$F_{centripeta} = m_T \frac{v^2}{r} \quad \text{per il moto circolare uniforme si ha } v = \frac{2\pi r}{P} \text{ dove } P \text{ è il periodo, dunque}$$

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{P^2} \quad \text{moltiplicando e dividendo per } r \text{ si ha}$$

$$F_{centripeta} = m_T \frac{1}{r^2} \frac{4\pi^2 r^3}{P^2}$$

Notando che r^3/P^2 altro non è che la costante di Keplero del Sole possiamo scrivere

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_s$$

Il colpo di genio di Newton fu quello di dire che il Sole, per il terzo principio della dinamica, sentirà una forza F' uguale ed opposta a F (forza percepita dalla Terra), ed allora uguaglia F ad F' , ciò significa dover scambiare semplicemente i pedici di m e C :

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} C_S = F' = 4\pi^2 \frac{m_S}{r^2} C_T$$

Allora ne segue che

$$m_T C_S = m_S C_T \quad \text{ossia dovrà essere} \quad \frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T}$$

ed il suo colpo di genio esplode supponendo che se questa uguaglianza deve valere per il Sole e la Terra perché non pensare che valga per qualsiasi coppia di masse ossia che sia una proprietà universale!!!!

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T} = \frac{C_{saturno}}{m_{saturno}} = \frac{C_{luna}}{m_{luna}} = \frac{C_{gian}}{m_{gian}} \text{ costante}$$

Newton esplicitò tale costante nel seguente modo

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T} = \frac{C_{saturno}}{m_{saturno}} = \frac{C_{luna}}{m_{luna}} = \text{costante} = \frac{G}{4\pi^2} \quad (\text{con } G \text{ costante})$$

perché tale scrittura semplificherà l'espressione a cui si arriverà. Infatti si ha

$$C_S = m_S \frac{G}{4\pi^2} \text{ che sostituita nell'espressione di } F \text{ sopra ricavata ci dà}$$

$$F_{centripeta} = 4\pi^2 \frac{m_T}{r^2} m_S \frac{G}{4\pi^2}$$

e semplificando (ecco perché quel $4\pi^2$) si arriva alla formula che lo porrà nella storia della scienza come stella di prima grandezza (fu in effetti la sua più grande scoperta):

$$F(r) = G \frac{m_S m_T}{r^2}$$

Newton arriva così a dimostrare che la forza è di tipo centrale, cioè che dipende esclusivamente dal modulo della distanza ed esplicita il tipo di dipendenza dalla distanza. Avendo già precedentemente stabilito che essa è radiale e di tipo solamente attrattivo, la sua espressione vettoriale sarà:

$$\mathbf{F}(r) = -G \frac{m_S m_T}{r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{dove il versore punta dall'origine (il centro del sole dell'esempio precedente) al punto di interesse).}$$

E più in generale, *quindi universalmente*, due corpi dotati di massa M ed m (con $M \gg m$ e SR inerziale centrato su M) si attrarranno secondo la legge di gravitazione universale

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{M m}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove il versore punta dall'origine (il centro di M) al punto di interesse (centro di m).

Ad un tale risultato si giunge anche, usando una matematica più complessa, considerando le orbite ellittiche.

L'interazione gravitazionale è dunque una forza centrale, sempre attrattiva che varia con l'inverso del quadrato della distanza.

b) *Orbita ellittica*

Il fatto che traiettoria sia ellittica può essere dimostrato a partire dalla conservazione dell'energia.

Partiamo dal fatto che una forza centrale è conservativa. Una forza si dice conservativa quando il suo lavoro che matematicamente è un integrale curvilineo, non dipende dal percorso seguito per calcolare tale integrale ma solo dai suoi estremi, che sono i due punti di partenza e di arrivo sulla traiettoria. Nel nostro caso, sapendo che F è centrale si ha:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F(r) \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \frac{F(r)}{r} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \int_A^B \frac{F(r)}{2r} dr^2 \\ &= \int_A^B \frac{F(r)}{2r} 2r dr = \int_A^B F(r) dr = V(B) - V(A) \end{aligned} \quad (1)$$

Dunque se $F(r)$ ammette una primitiva V , cosa che avviene generalmente – quasi tutte le funzioni che si incontrano in fisica sono integrabili – allora il campo è conservativo. Questo implica che il lavoro su un percorso chiuso – tale integrale è detto “circuitazione” – è nullo. $L = \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$

Un modo alternativo di giungere allo stesso risultato è quello di utilizzare un'altra definizione di forza conservativa: una forza si dice conservativa quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto.

Nota teorica

Definizione: la forma differenziale lineare, definita su un certo dominio D nel campo reale, è del tipo

$$A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

e viene detta esatta se esiste una qualche funzione scalare $V = V(x,y,z)$ definita su D tale che il suo differenziale totale coincida con la forma differenziale

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) dz = A dx + B dy + C dz$$

La funzione V è detta potenziale del campo vettoriale $\mathbf{F} = A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k}$.

Scriviamo il lavoro espandendo le componenti

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz); \quad dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

riconosciamo così l'integrando essere una forma differenziale. Tale integrale dipende dal percorso che si sceglie per eseguire il calcolo dell'integrale, noi però siamo interessati a vedere quali siano le condizioni affinché tale integrale dipenda solo dagli estremi A e B. Tale condizione effettivamente esiste ed è la seguente: la forma differenziale dL deve essere il differenziale di una funzione scalare V delle sole coordinate, cioè deve risultare

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = F_z$$

Se ciò accade si dice che la forma differenziale è esatta.

Infatti quando questa condizione è soddisfatta allora l'integrale di linea può essere così sviluppato

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_A^B \left(\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_A^B dV = V(B) - V(A) \end{aligned}$$

Ritrovando così la (1).

Abbiamo notato a commento della (1) che generalmente \mathbf{F} ammetta una primitiva, vediamo adesso le condizioni a cui deve soddisfare \mathbf{F} affinché ciò avvenga.

A tal fine invocando il teorema di Schartz si può senz'altro affermare che un campo di forze $\mathbf{f} (f_x, f_y, f_z)$ – definito in uno spazio semplicemente connesso – è conservativo se

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

Ed è facile verificare che per la forza gravitazionale queste relazioni sono soddisfatte.

Scriviamo, a tal uopo, la forza gravitazione esplicitando le coordinate (ricordando che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e che \mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r) e facciamo le derivate richieste

$$F_x = G \frac{Mm x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad F_y = G \frac{Mm y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad F_z = G \frac{Mm z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

Per semplicità poniamo $GMm = \text{cost} = 1$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Verificato dunque che la forza gravitazione è conservativa sarà possibile associare ad essa la funzione scalare potenziale $V = V(x, y, z)$, avendosi

$$L_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V(B) - V(A)$$

Dunque

$$V = G \frac{Mm}{r} + \text{cost}$$

Al potenziale viene associato la grandezza ad essa praticamente coincidente energia potenziale che differisce unicamente per il segno (si fa questo per uno scopo di pura praticità, ossia per avere nella conservazione dell'energia la somma di K e U anziché la loro differenza).

$$U = -V$$

$$U = -G \frac{Mm}{r} + \cos t$$

Ora siamo in grado di scrivere la conservazione dell'energia di un sistema del tipo Sole-Terra con M massa del Sole ed m quella della Terra ($M \gg m$).

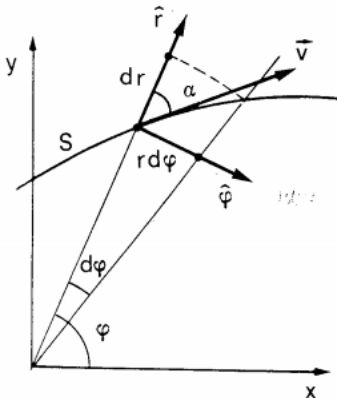
$$K + U = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = E \equiv \cos t \quad (2)$$

Esplicitiamo questa relazione in coordinate polari. Trattandosi di un moto piano, possiamo scegliere il piano xy coincidente con il piano dell'orbita; per descrivere il moto, sono sufficienti allora due parametri e non più tre, scegliamo il raggio e l'angolo (anomalia), allora le componenti della velocità sono

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\varphi \mathbf{u}_\varphi = v \cos \alpha \mathbf{u}_r + v \sin \alpha \mathbf{u}_\varphi = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{u}_\varphi$$

Nella figura seguente viene schematizzata la situazione



Pertanto la (2) diviene

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r} \quad (3)$$

Occorre in qualche modo "togliere" il differenziale dell'anomalia, a tal fine ricordiamo che il modulo del momento angolare L è $L = r m v \sin \alpha$ ed in coordinate polari è

$$L = rm(v \sin \alpha) = rm \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

Ed allora

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (4)$$

e si ricordi che L è una quantità costante durante il moto, allora la (3) diviene

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r} \text{ da cui}$$

$$\frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = E + G \frac{Mm}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (5)$$

Quest'ultima relazione è un'equazione differenziale del primo ordine che non è possibile risolvere analiticamente [vedi nota (1)]. La natura non sempre è così semplice come noi vorremmo! Anche nel caso più semplice di due corpi interagenti gravitazionalmente, non è possibile ottenere un'equazione oraria del moto.

Tuttavia siamo qui interessati a trovare l'equazione della traiettoria, cioè la relazione fra il raggio e l'anomalia $r = r(\varphi)$. A tal uopo dividiamo membro a membro la (4) con la (5)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{L}{mr^2} \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \\ d\varphi &= \frac{dr}{r^2} \frac{\pm b}{\sqrt{-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (6) \end{aligned}$$

Dove si è semplificata la scrittura introducendo le costanti a e b (reali e positive, in quanto stiamo considerando un sistema legato avente quindi energia totale negativa $E < 0$)

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{-\frac{L^2}{2Em}} \\ a &= -\frac{GMm}{2E} \end{aligned}$$

La (6) può essere integrata membro a membro ottenendo

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \arccos \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{dove } \varphi_0 \text{ è una costante di integrazione che può essere posta uguale a}$$

zero pur di scegliere opportunamente l'orientamento degli assi coordinati. Quindi in tale situazione si ha

$$\cos \varphi(r) = \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{arrivando così alla cercata equazione della traiettoria:}$$

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi} \quad (7)$$

Ricordando che l'equazione di una ellisse in coordinate polari è

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi}$$

la (7) rappresenta proprio una ellisse con asse maggiore a asse minore b e con eccentricità $e = (a^2 - b^2)^{1/2}$.

Vediamo ad esempio il valore numerico di a e b per la Luna.

$$\frac{1}{2}m_L v^2 - G \frac{M_T m_L}{R_{T-L}} = E$$

Il valore della velocità orbitale della Luna è:

$$v_{T-L} = \frac{2\pi R_{T-L}}{P} = \frac{2\pi \cdot 385 \cdot 10^6}{2.36 \cdot 10^6} = 1024 \text{ m/s} = 1.02 \text{ km/s}$$

(quella della terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole è 30 km/s)

$$E = \frac{1}{2} 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 1024^2 - 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{385 \cdot 10^6} = 3.85 \cdot 10^{28} - 7.64 \cdot 10^{28} = -3.79 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

Come ci si aspettava il valore dell'energia totale meccanica è negativa come deve essere per un sistema legato. Il valore del momento angolare è

$$L = m\omega R_{T-L}^2 = 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 2.66 \cdot 10^{-6} \cdot (385 \cdot 10^6)^2 = 2.90 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2 / \text{s}$$

Dunque

$$b = \sqrt{-\frac{(2.90 \cdot 10^{34})^2}{2 \cdot (-3.79 \cdot 10^{28}) \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}} = \sqrt{\frac{8.41 \cdot 10^{68}}{55.7 \cdot 10^{50}}} = 3.89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$a = -\frac{GMm}{2E} = -\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.0 \cdot 10^{24} \cdot 7.35 \cdot 10^{22}}{2 \cdot (-3.79 \cdot 10^{28})} = 3.88 \cdot 10^8 \text{ m}$$

A causa delle approssimazioni nel calcolo il valore di a risulta essere maggiore del valore di b , ovviamente facendo i calcoli in modo più raffinato si ottiene il risultato atteso e $e = (a^2 - b^2)^{1/2} = 0.005$.

Ed allora l'equazione, con valori numerici un po' approssimativi, della traiettoria della Luna è

$$r(\varphi) = \frac{15.1 \cdot 10^{16}}{3.88 \cdot 10^8 + 0.055 \cos \varphi}$$

Graficando tale curva si ha praticamente una circonferenza. Lo si vede immediatamente in quanto il termine del coseno praticamente è molto vicino allo zero risultando così il valore del raggio costante.

Nota (1)

Il Mencuccini-Silvestrini riporta la seguente affermazione a commento della (5): "l'equazione differenziale del primo ordine potrebbe essere risolta con relativa facilità per separazione di variabili, ottenendo così l'equazione oraria del moto, che poi sostituita nella (4) anche quest'ultima potrebbe essere risolta per separazione di variabili fornendo la legge oraria per l'anomalia". Affermazione alquanto bizzarra. La natura non sempre accontenta le nostre aspettative! Infatti...si ha:

posto $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ l'equazione si scrive:

$$r'(t) = \sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}$$

$$\frac{r'(t)}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{r(t)} - \frac{c}{r^2(t)}}} r'(t) dt = \int 1 dt \quad \text{che risolta ci dà la seguente soluzione}$$

$$\frac{\sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}}{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \log[ab + 2a^2 r(t) - 2\sqrt{a^3} \sqrt{a r^2(t) + b r(t) - c}] = t + k$$

Ottenendo così un'equazione implicita nell'incognita $r(t)$ **che purtroppo non è possibile esplicitare** per ogni $t > 0$. Quindi anche **avere una equazione oraria per l'anomalia è pura fantasia**. In questi casi vi è un'unica strada percorribile ossia una soluzione numerica. Quindi ad esempio si potrebbero considerare le due equazioni (4) e (5) a sistema, esplicitando le condizioni iniziali si potrebbe procedere con il metodo Runge-Kutta che sono un'importante famiglia di metodi iterativi impliciti ed espliciti per l'approssimazione delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, sapendo per certo che sarà possibile determinare i grafici $r(t)$ e $\varphi(t)$.

c) La terza legge di Keplero

La terza legge di Keplero potrebbe essere dimostrata nel caso generale risolvendo l'equazione (5), ma per semplicità lo vediamo pensando al moto circolare che diviene un moto circolare uniforme. Lo si vede immediatamente dalla (4) in quanto sia L che r sono costanti la velocità angolare sarà anch'essa costante. Scriviamo l'equazione $F = ma$ applicata in questo caso

$$-G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_r = -m\omega^2 r \mathbf{u}_r$$

$$GM = \omega^2 r^3 \quad \text{e ricordando che} \quad \omega = \frac{2\pi}{P} \quad \text{si ha} \quad GM = \frac{4\pi^2}{P^2} r^3 \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cost}$$

Questa relazione essendo indipendente da m dimostra per i moti circolari la terza legge di Keplero. Notando come già visto che l'eccentricità dei pianeti è molto prossima al valore zero l'approssimazione di orbita circolare è una buona descrizione del fenomeno.

Newton però non conosceva il principio di conservazione dell'energia (che vede la luce con Joule nel 1843). Dapprima Newton trattò tale problema nel suo breve trattato *De motu*, e poi lo perfezionò nei suoi *Principia*. La sua dimostrazione si basava sui tre principi della dinamica, da lui stesso codificati, e dalla legge della gravitazione universale, suo maggior successo scientifico. Tale dimostrazione era però principalmente geometrica e si fondava sulle proprietà delle curve coniche, il cui studio risale al III secolo a.C., e sul metodo

della *extrema ratio*, cioè di quello che oggi chiamiamo teoria dei limiti o più in generale analisi matematica. Tale branca della matematica prende avvio proprio da Newton e indipendentemente da Leibnitz.

Per inciso il grande fisico Richard Feynman nel 1964, trovando egli stesso ostico seguire i complessi ragionamenti geometrici di Newton rifece a modo suo la dimostrazione, rendendola più comprensibile ad un pubblico moderno. Per chi fosse interessato può consultare il libro *Il moto dei pianeti intorno al Sole* di D.L. Goodstein (Zanichelli).

Newton stesso verificò la correttezza della sua legge di gravitazione confrontando l'accelerazione centripeta della Luna con l'accelerazione di gravità terrestre $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ (questo valore era noto sin dai tempi di Galileo).

Per inciso la teoria di Newton nulla dice circa il valore della costante G . La prima misura indiretta della costante di gravitazione universale fu ottenuta nel 1774 dall'astronomo Nevil Maskelyne, su suggerimento di Henry Cavendish, nell'esperimento dello Schiehallion, atto a misurare la densità media della Terra e dal valore di questa risalire tramite la relazione della forza gravitazionale applicata ad un grave, al valore di G . Successivamente. Egli misuro, per la densità del nostro pianeta, un valore di 4.5 kg/m^3 (valore attuale 5.5 kg/m^3). Nel 1798, lo stesso Cavendish eseguì direttamente un proprio esperimento tendente a misura direttamente il valore della costante G , tramite una bilancia di torsione ottenendo un valore molto vicino a quello attuale ($G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}$).

Newton ipotizzò che sia la Luna sia una qualsiasi alta massa ad una certa distanza dalla Terra fossero attratti verso di essa secondo la formula da lui scoperta. Egli considera la Terra, la Luna ed un grave (possiamo pensare ad esempio alla classica mela), ossia un corpo posto nelle immediate vicinanze della superficie terrestre per cui si può porre la sua distanza coincidente con il valore del raggio terrestre (valore noto fin da Eratostene). Le due forze sono allora:

$$F_{\text{sulla mela}} = G \frac{m_T m_{\text{mela}}}{R_T^2} = m_{\text{mela}} a_{\text{mela}}$$

$$F_{\text{sulla luna}} = G \frac{m_T m_{\text{luna}}}{R_{T-L}^2} = m_{\text{luna}} a_{\text{luna}}$$

I valori delle accelerazioni sono

$$a_{\text{mela}} = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$a_{\text{luna}} = G \frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

Ribattezziamo la notazione per le accelerazioni usando il simbolo g che è il più usato quando ci si riferisca ad una accelerazione dovuta alla gravità di un corpo

$$g_{\text{mela}} = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{\text{luna}} = G \frac{m_T}{R_{T-L}^2}$$

L'accelerazione del grave è dunque $g_{\text{mela}} = 9.8 \text{ m/s}^2$ che in virtù del fatto che essa è comune a tutti i gravi possiamo indicare semplicemente con g .

Era noto che il valore della distanza Terra-Luna era circa 60 volte il valore del raggio terrestre, per cui si ha

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

$$g_{\text{luna}} \approx G \frac{m_T}{(60 R_T)^2} = \frac{1}{3600} G \frac{m_T}{R_T^2} = \frac{1}{3600} g = \frac{1}{3600} 9.80 = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Scoprì così che l'accelerazione di gravità della Luna secondo la sua teoria doveva valere circa $(1/3600) g$.

Non gli rimase da fare altro che verificare tale valore coincidesse con l'accelerazione che compete ad un corpo che si muove di un moto circolare uniforme v^2/R

$$a_{centr} = \frac{v^2}{R_{T-L}} = \frac{(2\pi R_{T-L} / P)^2}{R_{T-L}} = \frac{4\pi^2 R_{T-L}}{P^2} \approx \frac{4\pi^2 60 R_T}{P^2}$$

introducendo i valori di R_T e P (noti a quell'epoca) si ha

$$a_{centr} = \frac{4\pi^2 60 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{(2.36 \cdot 10^6)^2} = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ m / s}^2$$

Trovando così la sostanziale uguaglianza fra $a_{cent-Luna}$ e g_L , ossia l'accelerazione di gravità calcolata con la sua teoria. Verificò in questo modo la validità della sua costruzione teorica che cioè l'accelerazione centripeta della Luna è proprio dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata su di essa dalla Terra.

Egli annotò: *"Ho confrontato la forza necessaria per mantenere la luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla terra ed ho trovato che concordano."*

Concludiamo questa nota sulla gravitazione, inquadrata da un punto di vista storico, con qualche altra considerazione.

La forza peso

Secondo Voltaire, fu osservando la caduta di una mela nel suo giardino che Newton ebbe la sua idea rivoluzionaria rispetto alla cultura del suo tempo, che cioè la forza peso – la forza responsabile della caduta degli oggetti sulla superficie terrestre (detti "gravi") – altro non è che la forza gravitazionale con cui la Terra attira verso il suo centro ad essa circostanti, ed è dunque anche la stessa forza in virtù della quale –

ad esempio – la Luna orbita intorno alla Terra. La forza con cui un corpo viene attratto dalla Terra si può scrivere (proprio sfruttando la seconda legge della dinamica da lui stesso concepita: $F = ma$)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

m = massa del corpo

g = accelerazione di gravità

in virtù del significato specifico dell'accelerazione, gli è stata attribuita un simbolo tutto suo, la lettera g .

L'idea è allora di porre questa forza pari a quella gravitazionale della Terra

$$m\mathbf{g} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_R \text{ dove il versore punta dal centro della Terra verso l'esterno}$$

L'accelerazione di gravità punta verso il centro della Terra, per cui si ha

$$-m\mathbf{g} \mathbf{u}_R = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}_R \text{ ed allora il problema diventa unidimensionale}$$

$$mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

E semplificando si ha

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

Se in questa espressione poniamo la distanza del grave dal centro della Terra proprio uguale al raggio terrestre, e nominando la g con il pedice zero, si ha

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} = 9.8 m/s^2$$

Se invece siamo ad una certa quota h rispetto alla superficie si ha: $r = R_T + h$ e l'accelerazione di gravità vale

$$g = G \frac{M}{(R_T + h)^2} = G \frac{M}{R_T^2 + h^2 + 2R_T h} = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h^2 / R_T^2 + 2h / R_T)} = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h / R_T)^2}$$

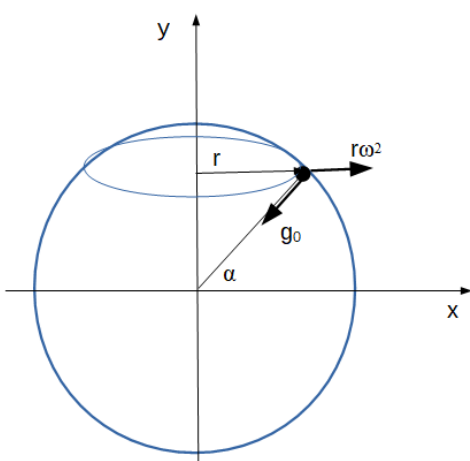
Siccome per quanto vogliamo pensare la quota alta sarà sempre $h \ll R_T$ possiamo sviluppare il binomio, avendo:

$$g = G \frac{M}{R_T^2 (1 + h / R_T)^2} \approx G \frac{M}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right) = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right)$$

Dove vediamo che per una quota di qualche chilometro il termine correttivo incide sul valore di g per meno dell'uno per mille.

Finora ci siamo posti in un SR inerziale, se invece volessimo voler tener conto del fatto che un laboratorio terrestre non è un SR inerziale in quanto sottoposto al moto di trascinamento dovuto al moto di rotazione della Terra intorno al suo asse dobbiamo usare la relazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{tr}$ avendo trascurato il moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole e pensando che il nostro grave inizi il suo moto da fermo in modo che l'accelerazione di Coriolis sia nulla.

Facendo riferimento alla figura seguente



La forza peso si scrive come somma del contributo statico (Terra non in rotazione) più la forza apparente dovuto al fatto che il grave ruota su una circonferenza di raggio $r = R_T \cos \alpha$ dove α è la latitudine.

$$\mathbf{F}_p = -mg_0 \mathbf{u}_{R_T} + m\omega^2 r \mathbf{u}_r$$

È immediato osservare che $\mathbf{u}_{R_T} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$
 $\mathbf{u}_r = \mathbf{i}$

Dunque

$$\mathbf{F}_p = -mg_0(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + m\omega^2 R_T \cos \alpha \mathbf{i} = m(-g_0 \cos \alpha + \omega^2 R_T \cos \alpha) \mathbf{i} - mg_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

Da cui si vede che ai poli dove $\alpha = 90^\circ$

$$\mathbf{F}_p = -mg_0 \mathbf{j}$$

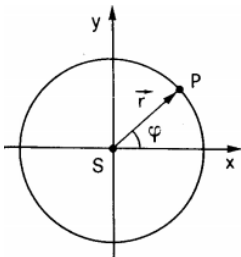
mentre all'equatore

$$\mathbf{F}_p = m(-g_0 + \omega^2 R_T) \mathbf{i}$$

Nelle situazioni intermedie la forza peso viene leggermente modificata sia in direzione che in modulo, comunque essendo il valore massimo (all'equatore) dell'accelerazione centrifuga pari a $3.37 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$ entro un errore dello 0.3% possiamo considerare g costante.

Il potenziale efficace ed orbita di equilibrio

Come abbiamo visto ogni pianeta percorre intorno al Sole un'orbita praticamente circolare. Se trascuriamo le deboli interazioni gravitazionali fra di essi che portano il sistema planetario ad essere un sistema caotico, se ci limitiamo quindi a considerare un arco di tempo non grandissimo (quanche miliardo di anni) possiamo dire che l'orbita di un pianeta è stabile. Se qualcuno cercasse di aumentare o diminuire il raggio dell'orbita (fissata la velocità di rivoluzione o meglio fissato il valore del momento angolare), il pianeta verrebbe riattratto verso la sua orbita originaria da una forza di richiamo. Per vedere cosa accade poniamoci in un SR non inerziale ma rotante, con origine nel Sole ed un asse r – diretto dal Sole verso la posizione P occupata istante per istante dal pianeta. Come in figura.



Tale asse ha una velocità angolare $\omega = d\varphi/dt$. In tale SR il pianeta è allora soggetto oltre che alla forza di gravitazione $-GMm/r^2 \mathbf{u}_r$, anche alla forza apparente centrifuga $m\omega^2 r \mathbf{u}_r$. Allora la componente radiale della forza F_r del risultante delle forze è

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2} + m \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 r$$

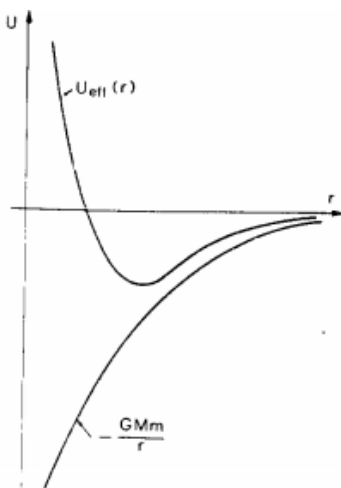
Siccome l'orbita è non perfettamente circolare la velocità angolare non sarà perfettamente costante, ma sarà perfettamente costante il momento angolare. Conviene dunque esprimere la forza centrifuga in termini di L , cosa che può essere fatta facilmente ricordando la (4) si ottiene

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

Questa è una forza conservativa, essendo una forza centrale, e possiamo calcolare la sua energia potenziale che viene detta "efficace", si ha (scegliendo pari a zero la costante di integrazione in modo che il potenziale sia nullo all'infinito):

$$U_{ff} = -V_{eff} = -\int F_r dr = -\int \left(-G \frac{Mm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3} \right) dr = -G \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

L'andamento di tale funzione è come quello in figura



Essa si annulla per $r \equiv \bar{r} = \frac{L^2}{2GMm^2}$ e presenta un minimo per

$$r \equiv r_0 = 2\bar{r} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Come noto il punto di minimo dell'energia potenziale rappresenta un punto di equilibrio stabile nel SR rotante. Fissato cioè un certo valore per il momento angolare, esiste un solo preciso valore r_0 per il raggio tale che se in esso viene posto il pianeta con velocità radiale nulla (e dunque solo con velocità tangenziale corrispondente a quel valore di L) esso resta in quella posizione stabilmente, percorrendo nel SR inerziale un moto circolare.

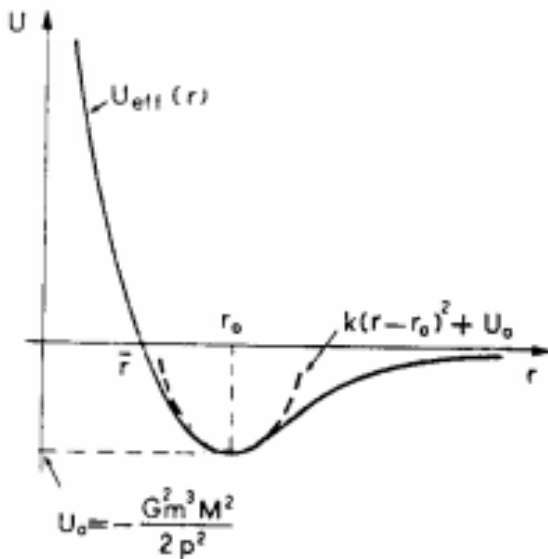
Vediamo cosa succede se il pianeta viene posto su un'orbita leggermente diversa da quella con raggio r_0 .

Vediamo che intorno al punto di minima energia potenziale la funzione può essere ben approssimata da una funzione del tipo $U(r) = k(r - r_0)^2 + U_0$ dove k è una opportuna costante e tale funzione è come evidente una funzione caratteristica di una forza elastica (con costante elastica k).

Dunque il pianeta sarà soggetto ad una forza di richiamo che può essere così espressa

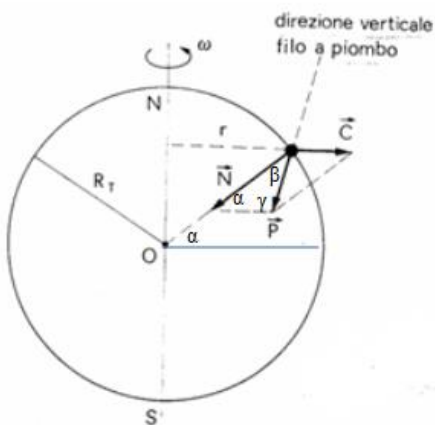
$$F_r = -\frac{\partial U_{ff}}{\partial r} \simeq -\frac{\partial}{\partial r} (k(r - r_0)^2) = -2k(r - r_0)$$

Tale situazione può essere visualizzata dal seguente grafico.



Inerzia e gravitazione

Da quanto visto sinora sembrerebbe che la materia possedesse due proprietà concettualmente distinte in riferimento alla grandezza massa: da un lato la massa inerziale (la sua capacità ad offrire resistenza al moto) e dall'altro la massa gravitazionale (quella proprietà che gli permette di attrarre ed essere attratto dagli altri corpi massivi). Come discusso al paragrafo III.6 del Mencuccini – Sivestrini è un fatto sperimentale che le due masse siano fra esse proporzionali. Si può allora osservare che la forza peso \mathbf{P} , in un dato luogo di un dato corpo in quiete rispetto alla superficie terrestre, rappresenta nel SR non inerziale solidale con la Terra, a cui ogni laboratorio appartiene, la somma di due contributi, uno gravitazionale dovuto all'attrazione che la Terra esercita su di esso \mathbf{N} e l'altro inerziale dovuto alla forza centrifuga \mathbf{C} . In riferimento alla figura seguente si ha:



$$N = G \frac{M m_g}{R_T^2} \quad m_g = \text{massa gravitazionale}$$

$$C = m_i \omega^2 r = m_i \omega^2 R_T \cos \alpha \quad m_i = \text{massa inerziale}$$

La direzione di \mathbf{P} (angolo β) rappresenta la direzione filo a piombo (della verticale) nel luogo considerato.

Applicando la legge dei seni si ha $\frac{N}{\sin \gamma} = \frac{C}{\sin \beta} \cotg$

$$\frac{N}{C} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin((\pi - (\alpha + \beta)))}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta} = \sin \alpha \cotg \beta - \cos \alpha$$

Quindi fissato l'angolo della latitudine la direzione del filo a piombo dipende esclusivamente dal valore rapporto N/C dato da

$$\frac{N}{C} = \frac{GM}{R_T^2 \omega^2 d} \frac{m_g}{m_i}$$

E quindi dipende dal valore del rapporto fra la massa gravitazionale ed inerziale.

L'esperienza dimostra che la direzione della verticale in un dato luogo è la stessa per tutti i corpi quali che siano le dimensioni o la loro composizione chimica. Dunque sperimentalmente le due masse coincidono. Sarà poi Einstein a porre questa uguaglianza addirittura come principio nella sua Relatività Generale asserendo l'identità concettuale (oltre che sperimentale) fra massa gravitazionale ed inerziale, quindi l'impossibilità di distinguere tra la forza di inerzia da quella gravitazionale.

Le verifiche sperimentali dell'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale sono state effettuate mediante l'uso di piani inclinati (Galileo), pendoli (Newton), fino ad arrivare alle bilance di torsione (Loránd Eötvös). Attualmente la precisione raggiunta dagli esperimenti è nell'ordine di una parte su mille miliardi, precisione ottenuta dalla misurazione della distanza lunare tramite laser.

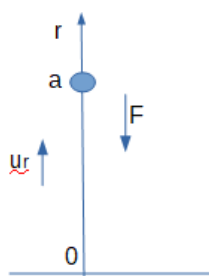
Tempo di caduta di un corpo in un campo centrale

Tempo di volo di un razzo per raggiungere l'altezza massima

Tempo di collisione di due corpi nello spazio

a cura di Giancarlo Buccella

- 1) Una particella di massa m si muove in un campo di forza centrale $\mathbf{F} = \frac{k}{r^n}(-\mathbf{u}_r)$, in cui k ed n sono costanti positive. Essa parte da ferma da un punto $r = a$ ed arriva in $r = 0$ con modulo di velocità finita v_0 . Dimostrare che la velocità in 0 è $v_0^2 = \frac{2k}{m} \frac{a^{1-n}}{1-n}$ e che n deve essere minore di 1.



Notiamo innanzitutto che per $r = 0$ la forza diverge, quindi è, più che altro, un problema di tipo matematico.

Applicando la seconda legge della dinamica si ha

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{k}{r^n}\mathbf{u}_r \quad (1)$$

essendo il problema unidimensionale possiamo scrivere

$$m \frac{dv}{dt} \equiv m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \equiv mv \frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^n} \quad \text{e quindi}$$
$$mvdv = -\frac{k}{r^n} dr \quad \text{integrando da 0 a } v_0 \text{ (la particella parte da ferma) e da "a" a 0 si ha} \quad (2)$$

$$\int_0^{v_0} mvdv = -\int_a^0 \frac{k}{r^n} dr$$

tenendo conto che l'integrale a secondo membro è convergente solo per $n < 1$, si ha

$$m \frac{1}{2} v_0^2 = -k \frac{a^{-n+1}}{n-1} \quad \text{ossia}$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{a^{1-n}}{1-n}} \quad \text{con } n < 1 \quad (3)$$

E' chiaro che la condizione $n < 1$ è venuta fuori dalla nostra richiesta "matematica" di voler calcolare la velocità nell'origine dove la forza diverge.

Occorre precisare che non è che la soluzione di questo particolare problema imponga la non esistenza di forze con $n > 1$, ma solo che se si ammette che, nelle condizioni indicate, il corpo riesca ad arrivare a $r=0$ con una velocità finita allora in questo caso e solo in questo caso deve essere $n < 1$.

E' semplice vedere (vedi più avanti) che questo non accade ad esempio con la forza gravitazionale (beninteso nell'ambito della meccanica classica e assumendo puntiforme e fissa la massa centrale).

Variante del problema 1

Togliamo la restrizione che la velocità sia finita nell'origine ed imponiamo allora che sia $n > 1$.

Proponiamoci di calcolare il tempo di caduta.

Riprendiamo la (2) senza specificare gli estremi di integrazione, ossia considerando gli integrali indefiniti, e per comodità scriviamo al posto di n , $p + 1$ con la condizione $p > 0$.

$$F = -\frac{k}{r^{p+1}}$$

$$\int mvdv = -\int \frac{k}{r^{p+1}} dr \text{ la cui soluzione è}$$

$$m \frac{1}{2} v^2 = -k \frac{r^{-p}}{-p} + c$$

$$v^2 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pr^p} + c \quad (4)$$

Sfruttiamo ora la condizione iniziale ($r(0) = a$ e $v(0) = 0$) per determinare la costante di integrazione,

$$0 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pa^p} + c \quad \text{da cui} \quad c = -\frac{2k}{mpa^p} \quad \text{allora la (4) diventa}$$

$$v(r)^2 = \frac{2k}{m} \frac{1}{pr^p} - \frac{2k}{mpa^p} \quad (5)$$

Notiamo per inciso che nell'origine, essendoci una singolarità, la velocità sarebbe infinita (questo problema è in effetti una esercitazione matematica). Procediamo allora nel calcolare il tempo, estraendo la radice quadrata da ambo i membri, separando le variabili ed integrando:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2k}{mpr^p} - \frac{2k}{mpa^p}} = \pm \sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right) \left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}$$

$$\int_a^0 \frac{dr}{\pm \sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right) \left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}} = \int_0^T dt$$

Considerando che con il trascorrere del tempo r diminuisce, sopravvive il segno negativo:

$$T = -\sqrt{\frac{m}{2k}} \int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}} \quad (6)$$

dove è chiaro che il radicando è sicuramente positivo in quanto $r < a$ per ipotesi.

Il problema consiste ora nel risolvere l'integrale.

Facciamo qualche elucubrazione algebrica al fine di semplificare un po' l'integrale

$$\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p} = \frac{a^p - r^p}{r^p a^p} = \frac{a^p}{r^p a^p} - \frac{r^p}{r^p a^p} = \frac{a^p}{r^p a^p} - \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^p} \left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right), \text{ quindi}$$

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a^p} \left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right)}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{\sqrt{a^p} dr}{\sqrt{\left(\frac{a^p}{r^p} - 1 \right)}} =$$

Ora operiamo la sostituzione di variabile $r/a = u$, quindi $dr = a du$, avendosi

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} \int_a^0 \frac{a^{p/2} dr}{\sqrt{\left(\left(\frac{a}{r} \right)^p - 1 \right)}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{p/2} \int_1^0 \frac{adu}{\sqrt{\frac{1}{u^p} - 1}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u^p} - 1}}$$

Ora facciamo una ulteriore sostituzione ponendo $x = u^p$, quindi $dx = pu^{p-1} du$ e $du = x^{1/p} dx/p$

$$T = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{\sqrt{u^p} du}{\sqrt{1-u^p}} = -\sqrt{\frac{mp}{2k}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \frac{x^{1/p} dx}{px} = -\sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \int_1^0 x^{(1/p+1/2-1)} (1-x)^{-1/2} dx$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \int_0^1 x^{(1/p-1/2)} (1-x)^{-1/2} dx \quad (7)$$

Ora chiamiamo in soccorso la funzione beta di Eulero, così definita

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

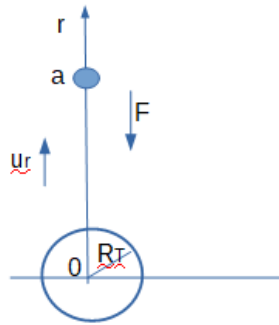
nel nostro caso si ha: $m-1 = 1/p - 1/2$ ed $n-1 = -1/2$,

quindi $m = 1/p + 1/2$ ed $n = 1/2$,

perciò in definitiva abbiamo che il tempo di caduta vale (il valore della funzione beta di Eulero è tabellata, e si può valutarla con un software di calcolo).

$$T = \sqrt{\frac{m}{2kp}} a^{(p/2)+1} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad (8)$$

- 2) Consideriamo ora il problema “fisico” di quello precedente, pensiamo per fissare le idee al caso gravitazionale: il corpo “sorgente” della forza centrale deve avere una dimensione finita, quindi deve avere un certo raggio, pensiamo al seguente problema. A seguito di un urto con un meteorite, un satellite geostazionario viene completamente fermato e inizia a cadere in verticale sulla Terra, come illustrato nella figura seguente. Calcolare il tempo di caduta T.



Assumiamo un asse nel piano che congiunge il satellite al centro Terra che ruoti insieme con essa. Su questo asse assumiamo una coordinata radiale r (unica variabile nel moto), quindi siamo davanti ad un problema ad un sol corpo.

Allora integrando la (2)

con la condizione iniziale $r(0) = a$ e $v(0) = 0$ e con la condizione finale $r(T) = R_T$ e $v(T) = v_0$ si ha

$$\int_0^{v_0} m v dv = - \int_a^{R_T} \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = -GM_T \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \right]_a^{R_T} = -GM_T \left(-\frac{1}{R_T} + \frac{1}{a} \right) = GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)$$

Dove il secondo membro è sicuramente positivo in quanto $a > R_T$ per ipotesi. Dunque la velocità in R_T vale

$$v_0 = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)} \tag{9}$$

(poniamo $k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14}$)

$$v_0 = \sqrt{2k \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)}$$

Come già osservato a margine della relazione (3), se in questa relazione pensassimo M “sorgente della forza centrale” come puntiforme ($R_T = 0$), si avrebbe una velocità infinita nell’origine.

Facciamo un esempio numerico, considerando dunque un satellite geostazionario che si fermasse istantaneamente ed iniziasse quindi il suo moto unidimensionale di caduta,

sia: $a = 42.000 \text{ km}$ ed $R_T = 6.400 \text{ km}$.

Allora la sua velocità di impatto sulla superficie terrestre sarebbe

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7} \right)} = 10.3 \text{ km/s} \quad (10)$$

Se mandiamo “a” ad infinito abbiamo (è la situazione simmetrica del lancio di un grave dalla superficie della Terra ad infinito):

$$v_0 = \sqrt{8 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{\infty} \right)} = \sqrt{8 \cdot 10^{14} \left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - 0 \right)} = 11.2 \text{ km/s}$$

Ritrovando così il noto risultato della velocità di fuga di un satellite lanciato dalla superficie terrestre.

Ritorniamo al nostro quesito. Impostiamo il problema, del calcolo del tempo, partendo da

$$F = ma = -GMm/r^2,$$

essendo un problema unidimensionale si ha

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -GM_T m \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -GM_T \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \quad (11)$$

Risolviamo questa “banale” eq. differenziale del secondo ordine non lineare, sapendo che le condizioni al contorno sono

$$r_{\text{in}} \equiv a = 42000 \text{ km} = 4.2 \cdot 10^7 \text{ m} \quad v_{\text{in}} = 0$$

$$r_{\text{fin}} \equiv R_T = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m} \quad v_{\text{fin}} = 10.3 \text{ km/s} \quad \text{come calcolato nella (10)}$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{r}(t) = -\frac{k}{r^2}$$

$$r(0) = a$$

$$\dot{r}(0) = 0$$

Conviene moltiplicare ambo i membri per $2\dot{r}$ ottenendo

$$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{2\dot{r}k}{r^2} \quad \text{così si ha che il primo membro è diventato } \frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = 2\dot{r}\ddot{r} \quad \text{quindi possiamo scrivere}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = -\frac{2k}{r^2} \dot{r} \quad \text{ed integrando}$$

$$v^2 \equiv (\dot{r})^2 = -2k \int \frac{\dot{r}}{r^2} dt = -2k \int \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2} dt = -2k \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{2k}{r} + c_1$$

Imponendo la condizione iniziale di velocità nulla in $r = a$, ricaviamo c_1

$$0 = c_1 + \frac{2k}{a} \Rightarrow c_1 = -\frac{2k}{a}$$

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad (12)$$

A questa relazione si arriva anche dalla conservazione dell'energia, infatti, uguagliando l'energia iniziale con quella in un punto generico r :

$$E_{in} = E(r)$$

$$K_{in} + U_{in} = K(r) + U(r)$$

$$0 - GM_T m/a^2 = \frac{1}{2} m v^2 - GM_T m/r^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = GM_T m/r^2 - GM_T m/a^2$$

$$v^2 = 2GM_T/r^2 - 2GM_T/a^2 \quad \text{da cui la (12), ove si ricordi che } k = GM_T.$$

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità diminuisce con l'aumentare del tempo per cui deve aversi $v(r) = -dr/dt$, cioè in sostanza occorre togliere il segno più al secondo membro della (12).

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{dr}{\sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = dt$$

$$\int_0^T dt = - \int_{r_{in}}^{r_{fin}} \frac{dr}{\sqrt{2k} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = - \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_a^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} \quad (12 \text{ bis})$$

risolvendo l'integrale (con il programma di calcolo Wolfram) si ha

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \left(-\arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right) \right) - ar \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right]_{R_T}^a$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right) + aR_T \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right] \quad (13)$$

Inserendo i valori numerici abbiamo

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} \left[(4.2 \cdot 10^7)^{3/2} \left(\arctan \left(\sqrt{4.2 \cdot 10^7} \sqrt{\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7}} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + 4.2 \cdot 10^7 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7}} \right] =$$

$$= 35.4 \cdot 10^{-9} [(2.72 \cdot 10^{11} (\arctan(6480 \cdot 0.00036) + 269 \cdot 10^{12} (0.00036))] =$$

$$= 35.4 \cdot 10^{-9} (2.72 \cdot 10^{11} \cdot 1.16 + 0.97 \cdot 10^{11}) = 35.4 \cdot 10^{-9} \cdot 4.12 \cdot 10^{11} = 4.1 h$$

$$\mathbf{T = 4.1 h}$$

La soluzione (13) può anche essere scritta in modo leggermente diversa, rinunciando all'uso del programma di calcolo e risolvendo l'integrale "a mano", infatti:

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_a^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{a}{r} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{a}{r} - 1 \right)}}$$

Operiamo la sostituzione $r/a = u$ cioè $dr = a du$ con gli estremi che cambiano da $R_T/a = 0.152$ ad 1

$$T = \sqrt{\frac{a}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{a du}{\sqrt{1/u - 1}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{du}{\sqrt{1/u - 1}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[-u \sqrt{\frac{1}{u} - 1} - \arctan \sqrt{\frac{1}{u} - 1} \right]_{R_T/a}^1$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\frac{R_T}{a} \sqrt{\frac{a}{R_T} - 1} + \arctan \sqrt{\frac{a}{R_T} - 1} \right] \quad (14)$$

Inserendo i valori numerici si ha

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[0.152 \sqrt{\frac{1}{0.152} - 1} + \arctan \sqrt{\frac{1}{0.152} - 1} \right] = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} (0.152 \cdot 2.36 + \arctan 2.36) =$$

$$= \sqrt{\frac{(42 \cdot 10^6)^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} (0.359 + 1.17) = 9623 \cdot 1.53 = 14690 s = 4.1 h$$

$$\mathbf{T = 4.1 h}$$

Vi è ancora un modo diverso di arrivare alla soluzione facendo delle opportune sostituzioni nel calcolo dell'integrale. Ripartendo dalla (12 bis), facendo la sostituzione: $x = r/a$, $dx = (1/a)dr$ si ha

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{adx}{\sqrt{\frac{1}{ax} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{adx}{\sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{\sqrt{a} a dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{R_T/a}^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}} =$$

Facendo una ulteriore sostituzione: $x = y^2$, $dx = 2y dy$ si ha

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{\sqrt{R_T/a}}^1 \frac{2y dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{y^2} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \int_{\sqrt{R_T/a}}^1 \frac{2y^2 dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} 2 \left[-\frac{1}{2} y \sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y \right]_{\sqrt{R_T/a}}^1 =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[-y \sqrt{1 - y^2} + \arcsin y \right]_{\sqrt{R_T/a}}^1 = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(0 + \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{R_T}{a}} \sqrt{1 - \frac{R_T}{a}} - \arcsin \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right)$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right) \left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right) \quad (15)$$

Avendo sfruttato la relazione $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$.

La (15) è analoga a quella seguente fornita dal testo “Meccanica razionale” di Murray R. Spiegel (collana Schaum’s), che propone il problema simmetrico al nostro, dove viene chiesto il tempo occorrente ad un razzo che parta verticalmente con velocità v_0 ad arrivare alla quota massima h (dove h è la quota rispetto alla superficie terrestre):

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos\left(\frac{R_T - h}{R_T + h}\right) \right] \quad (16)$$

Facciamo vedere l’uguaglianza fra la (15) e la (16). Riportiamo la (16) riferita alla distanza “ a ” dall’origine (centro della Terra) anziché alla quota h rispetto alla superficie terrestre, essendo

$h = a - R_T$ e $g = k/R_T^2$ si ha

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{a}{2k/R_T^2}} \left[\sqrt{\frac{a - R_T}{R_T}} + \frac{a}{2R_T} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{a}{R_T}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{a}{R_T} \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right) \right] \\ T &= \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right) \\ T &= \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Adesso facciamo vedere che vale la seguente uguaglianza

$$\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a}\right) = \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \quad (18)$$

ponendo $R_T/a = x$ si ha

$\arccos(2x - 1) = 2 \arccos \sqrt{x}$ applicando la funzione coseno ad ambo i membri si ha:

$$(2x - 1) = \cos(2 \arccos \sqrt{x})$$

ricordando che $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ si ha

$$2x - 1 = \cos(2 \arccos \sqrt{x}) = 2 \cos^2(\arccos \sqrt{x}) - 1 = 2x - 1$$

Abbiamo così verificato l’uguaglianza, appena si ricordi che per definizione di arcocoseno si ha

$$\cos^2(\arccos \sqrt{x}) = x$$

Dunque la (17) può essere scritta in modo più compatto così:

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right] \tag{19}$$

Ritrovando la (15).

Verifica numerica della (15)

$$T = \sqrt{\frac{(4.2 \cdot 10^7)^3}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} \left[\sqrt{\left(\frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}\right)\left(1 - \frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^6}{4.2 \cdot 10^7}} \right]$$

$$T = 9623 \left[\sqrt{0.152(1 - 0.152)} + \arccos \sqrt{0.152} \right] = 9623(0.359 + 1.17) = 4.1h$$

T = 4.1 h

Calcoliamo per curiosità, la predizione del tempo di caduta dalla relazione (8) che ci dà il tempo fino al centro della Terra: $k = GM_T m$ e $p = 1$ (valore della funzione beta calcolato con un software di calcolo):

$$T = \sqrt{\frac{m}{2GM_T mp}} a^{(p/2)+1} \beta\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2GM_T}} a^{3/2} \beta\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}} (4.2 \cdot 10^7)^{1.5} \cdot 1.57 =$$

$$= 35.35 \cdot 10^{-9} \cdot 272 \cdot 10^9 \cdot 1.57 = 4.2h$$

Quindi il modello delle masse puntiformi ci fornisce un risultato inattendibile, (4.2 ore è il tempo di caduta fino ad R_T non fino al centro della Terra) poiché in quel problema il centro della forza era considerato privo di massa, a riprova che era un problema di tipo matematico.

Contro l'ingegno la forza bruta non può nulla.

Se anziché usare la forza bruta dell'analisi matematica, si fosse accesa la lampadina dell'intuizione ingegnosa, si sarebbe risparmiata tanta fatica. Infatti ricorrendo alla terza legge di Keplero il problema si risolve immediatamente. Infatti basta considerare il modo di caduta del satellite come un'orbita ellittica collassata in un segmento di estremi "a" ed O. Quindi il valore del semiasse maggiore è pari ad a/2, ed il suo periodo è T. Allora detto T₀ il periodo orbitale del satellite si ha

$$\frac{T_0^2}{a^3} = \frac{T^2}{(a/2)^3} \tag{20}$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \tag{21}$$

Per definizione di orbita geostazionaria il satellite artificiale deve percorrere l'orbita circolare in un tempo uguale al giorno siderale, T_{giorno siderale} = 23 h 56 min = 86160 s.

$$T = \frac{86160}{2\sqrt{2}} = 8.4 \text{ h}$$

Ma il satellite non compie un'orbita (collassata) intera, ma solo metà, quindi il tempo di caduta è la metà di T, perciò il risultato è

$$t = T/2 = 4.2 \text{ h}$$

N.B. Se non si conosce il valore di T₀ lo si può ricavare facilmente dalla relazione F = ma, che nel caso del satellite diventa (trascurando il segno): GM_t m/a² = mv²/r da cui v = (GM_T/a)^{1/2} e quindi il periodo è

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi a}{\sqrt{GM_T/a}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(42.168 \cdot 10^6)^3}{3.9857 \cdot 10^{14}}} \simeq 86160 \text{ s}$$

Avendo usato i valori più corretti per a = 42.168 · 10⁶ m e M_T = 5.972 · 10²⁴ kg

Ricapitolando abbiamo quattro relazioni equivalenti fra loro: (13), (14), (15) (16); per il calcolo del tempo di discesa (o ascesa) di un corpo lasciato cadere (o lanciato) sulla (o dalla) superficie terrestre verticalmente (dove “a” è la distanza riferita al centro della Terra, ed R_T il raggio terrestre).

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \arctan \left(\sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right) + a R_T \sqrt{\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}} \right]$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \text{ essendo } T_0 \text{ il periodo orbitale del satellite}$$

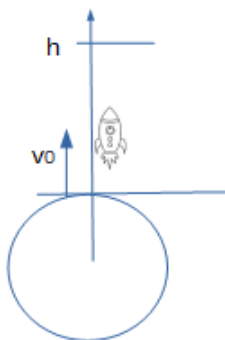
$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right) \left(1 - \frac{R_T}{a}\right)} + \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \right)$$

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos \left(\frac{R_T - h}{R_T + h} \right) \right] \text{ (riferita alla quota } h \text{ rispetto alla superficie terrestre)}$$

Problema simmetrico

2bis) Si calcoli il tempo di volo di un razzo che raggiunga l'altezza massima h dalla superficie terrestre.

Il moto inizia con velocità iniziale v_0 verticalmente.



Per simmetria al problema precedente possiamo affermare che il tempo di volo è quello già ricavato precedentemente, ma a noi interessa ora ricavarlo direttamente.

Possiamo intanto ricavare l'espressione dell'altezza massima raggiunta dal razzo che sarà ovviamente in funzione della velocità iniziale.

Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica.

$$E_{in} = E_{fin}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T m}{R_T} = 0 - G \frac{M_T m}{a}$$

$$v_0^2 = 2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2GM_T}{R_T} - \frac{2GM_T}{a} \Rightarrow \frac{2GM_T}{a} = \frac{2GM_T}{R_T} - v_0^2 = \frac{2GM_T - R_T v_0^2}{R_T} \text{ invertendo}$$

$$\frac{a}{2GM_T} = \frac{R_T}{2GM_T - R_T v_0^2}$$

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2} \quad (22)$$

Oppure, sostituendo k con $g R_T^2$:

$$a = \frac{2gR_T^2}{2gR_T - v_0^2}$$

Affinchè il denominatore sia positivo deve essere $v_0 < (2gR_T)^{1/2} = \text{velocità di fuga} = 11 \text{ km/s}$, infatti se la velocità è pari alla velocità di fuga la distanza dalla Terra va ad infinito, ossia esce dall'attrazione terrestre.

Volendo esprimere questo risultato in funzione dell'altezza h dalla superficie terrestre, si ha

$$\begin{aligned}
a \equiv R_T + h &= \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2} \\
h &= \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2} - R_T = \frac{2gR_T - 2gR_T + R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} \\
h &= \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} \tag{23}
\end{aligned}$$

Es. numerico per $v_0 = 3 \text{ km/s}$ si ha

$$h = \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} = \frac{6.4 \cdot 10^6 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 6.4 \cdot 10^6 - (3 \cdot 10^3)^2} \approx 500 \text{ km}$$

Partiamo come al solito dalla seconda legge della Dinamica.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -G \frac{M_T m}{r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{essendo il problema unidimensionale, si ha}$$

$$m \frac{dv}{dt} \equiv m \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \equiv mv \frac{dv}{dr} = -G \frac{M_T m}{r^2} \Rightarrow v \frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2} \quad (\text{con } k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14})$$

$$v dv = -\frac{k}{r^2} dr$$

$$\int v dv = -\int \frac{k}{r^2} dr$$

$$\frac{1}{2} v^2 = -\left(-\frac{k}{r}\right) + c_1 = \frac{k}{r} + c_1$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + c_1$$

$$\text{Sfruttando le condizioni iniziali } r(0) = R_T \text{ e } v(0) = v_0 \text{ si ha} \quad c_1 = v_0^2 - \frac{2k}{R_T}$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + \left(v_0^2 - \frac{2k}{R_T}\right) \tag{24}$$

Ora è utile avere un'espressione che non contenghi v_0 ma sia in funzione del parametro "a".

A tal uopo utilizziamo la (22)

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2}; \quad 2ka - aR_T v_0^2 = 2kR_T \Rightarrow v_0^2 = \frac{2ka - 2kR_T}{aR_T}$$

Dunque la (24) diventa

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} + \left(\frac{2ka - 2kR_T}{aR_T} - \frac{2k}{R_T}\right) = \frac{2k}{r} + \left(\frac{2ka - 2kR_T - 2ka}{aR_T}\right) = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Siccome r aumenta con il tempo occorre scegliere il segno positivo,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Separando le variabili

$$\frac{dr}{\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}} = dt$$

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$\int_0^T dt = \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{2k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R_T}^a \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[a^{3/2} \left(-\arctan \sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right) - ar \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \right]_{R_T}^a = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(a^{3/2} \arctan \sqrt{a} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}} + a R_T \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}} \right) \end{aligned}$$

Riottenendo la (13) e quindi per quanto già visto sopra, la soluzione proposta dal testo di cui sopra.

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos \left(\frac{R_T - h}{R_T + h} \right) \right]$$

Vediamo per curiosità, dopo questo excursus sul moto di un corpo in un campo centrale, quale errore si commetterebbe (nel caso di caduta), supponendo che l'accelerazione rimanesse costante al valore iniziale (nel punto "a"). Supponendo costante il valore dell'accelerazione (mentre in effetti aumenta), ci aspettiamo un tempo superiore a quello effettivo. Per non far confusione con la notazione usiamo, per questo calcolo, il simbolo h per indicare la distanza "a".

Nel punto "h" si ha $F(h) = G \frac{M_T m}{h^2} = ma \rightarrow a = \frac{GM_T}{h^2} = \frac{4 \cdot 10^{14}}{(42 \cdot 10^6)^2} = 0.23 \text{ m/s}^2$ ed allora

dalla relazione $s = \frac{1}{2} a t^2$ ricaviamo il tempo

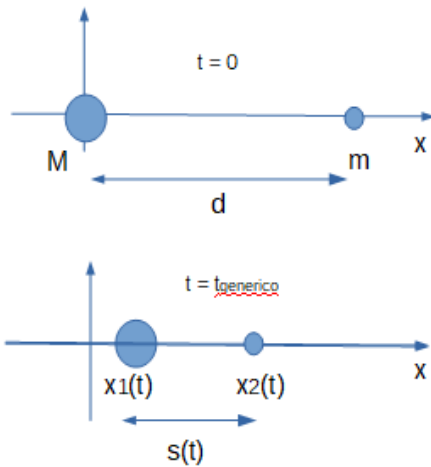
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35.6 \cdot 10^6}{0.23}} = 4.9 \text{ h}$$

Quindi l'errore (in eccesso, come atteso, essendo il moto più lento), è di 0.7 ore, ossia 42 min.

- 3) Quanto tempo ci impiegano due oggetti, di massa M ed m , di raggio R e r , posti ad una distanza d , a toccarsi nello spazio a causa dell'attrazione gravitazionale?

Si facciano le seguenti ipotesi: assenza di attrito; $d > r + R$; le velocità iniziali degli oggetti siano nulle (cambiarebbe pochissimo se le velocità fossero allineate sulla congiungente delle due masse).

Il problema è di fatto un problema a una dimensione. Rappresentiamo la situazione.



Le due masse si incontrano, nell'istante t , quando si avrà

$$s(t) = x_2(t) - x_1(t) = r + R$$

dove x_1 e x_2 sono le posizioni della massa M e m rispettivamente, sull'asse x , che congiunge i due centri delle masse. Inoltre si pone l'origine del sistema di riferimento tale per cui $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = d$.

Per un sistema chiuso e isolato, come il nostro, su cui, cioè, non agisca nessuna forza esterna netta, la quantità di moto \mathbf{P} rimane costante.

La forza netta è nulla in quanto

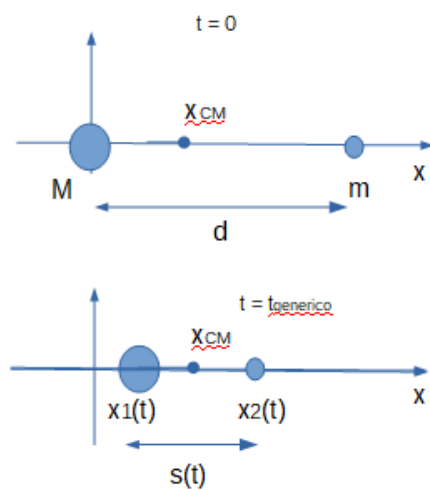
$$\mathbf{F}_{\text{totale}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = G \frac{Mm}{s(t)} \mathbf{i} + G \frac{Mm}{s(t)} (-\mathbf{i}) = 0$$

Quindi essendo

$$\mathbf{P} = (M + m) \mathbf{v}_{\text{CM}}$$

la velocità del centro di massa rimane costante nel tempo, ciò significa che se le masse sono poste inizialmente ferme, come si è assunto, allora la velocità del centro di massa è nulla, per cui x_{CM} rimane fisso.

La situazione in questo sistema di riferimento è



Sul corpo di massa M agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa m

$$\mathbf{F}_M = G \frac{Mm}{s(t)^2} \mathbf{i} = F(t) \mathbf{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\mathbf{a}_M \equiv \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_M}{M} = \frac{F(t)}{M} \mathbf{i}$$

Sul corpo di massa m agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa M

$$\mathbf{F}_m = -G \frac{Mm}{s(t)^2} \mathbf{i} = -F(t) \mathbf{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\mathbf{a}_m \equiv \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = -\frac{F(t)}{m} \mathbf{i}$$

essendo

$$s(t) = x_2(t) - x_1(t);$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x_2(t) - x_1(t)] = \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} - \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = a_2 - a_1$$

Il modulo dell'accelerazione relativa, cioè l'accelerazione della coordinata s(t), è

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} [a_2(t) - a_1(t)] = -\frac{F(t)}{m} - \frac{F(t)}{M} = -F(t) \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -F(t) \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = -G \frac{Mm}{s(t)^2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Avendo posto

$$k = GMm \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) = G(M + m)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} \equiv \ddot{s} = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Con le condizioni iniziali

$$s(0) = d$$

$$v(0) = ds(0)/dt = 0$$

Convieni moltiplicare ambo i membri per $2\dot{s}$ ottenendo

$$2\dot{s}\ddot{s} = -\frac{2\dot{s}k}{s^2} \quad \text{così si ha che il primo membro diventa} \quad \frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = 2\dot{s}\ddot{s} \quad \text{quindi possiamo scrivere}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = -\frac{2k}{s^2} \dot{s} \quad \text{ed integrando}$$

$$v^2 \equiv (\dot{s})^2 = -2k \int \frac{\dot{s}}{s^2} dt = -2k \int \frac{ds}{dt} \frac{1}{s^2} dt = -2k \int \frac{1}{s^2} ds = \frac{2k}{s} + c_1$$

Sfruttando le condizioni iniziali ricaviamo c_1 :

$$0 = \frac{2k}{d} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{2k}{d}$$

$$v^2(t) \equiv \left(\frac{ds(t)}{dt} \right)^2 = \frac{2k}{s} - \frac{2k}{d} = 2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \pm \sqrt{2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)}$$

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità della coordinata $s(t)$ diminuisce con l'aumentare del tempo ($ds/dt < 0$) per cui occorre prendere il segno meno.

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\sqrt{2k \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d} \right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{ds}{\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}=dt$$

$$\int_0^T dt = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{s_{in}}^{s_{fin}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}} = -\frac{1}{\sqrt{2k}} \int_d^{R+r} \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}$$

I corpi partono dalla distanza d ed arrivano a toccarsi quando s(T) = R + r

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{R+r}^d \frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[d^{3/2} \left(-\arctan \sqrt{d} \sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}} \right) - d s \sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}} \right]_{R+r}^d$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left[d^{3/2} \left(\arctan \sqrt{d} \sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}} \right) + d(R+r) \sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}} \right]$$

Esempio numerico: sia M = 10³ kg ; m = 10² kg; d = 10³ m; R = 5 m; r = 1 m

Allora si ha

$$k = G(M+m) = 6.67 \cdot 10^{-11} (10^3 + 10^2) = 7.34 \cdot 10^{-8}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 7.34 \cdot 10^{-8}}} \left[(1000)^{3/2} \left(\arctan \sqrt{1000} \sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}} \right) + 1000(R+r) \sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}} \right]$$

$$T = 2.6 \cdot 10^3 \left[(3.16 \cdot 10^4 \cdot \arctan 12.87 + 1000 \cdot 6 \cdot 0.41) \right]$$

$$T = 2.6 \cdot 10^3 \left[(3.16 \cdot 10^4 \cdot 85.56 + 1000 \cdot 6 \cdot 0.41) \right] = 2.6 \cdot 10^3 (2.70 \cdot 10^6 + 2.46 \cdot 10^3)$$

$$T = 7.02 \cdot 10^9 s = 222 \text{ anni}$$

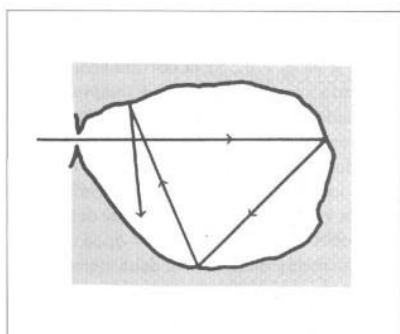
Teoria classica del corpo nero

a cura di Giancarlo Buccella

2 Modello e descrizione fisica

Un corpo solido emette, per effetto dell'agitazione termica degli atomi, una radiazione elettromagnetica, uniformemente distribuita in tutte le direzioni e non polarizzata, con uno spettro continuo che si estende, a temperature ordinarie, dalle microonde all'ultravioletto e la cui forma ha un aspetto caratteristico che dipende dalla temperatura assoluta.

Si definisce corpo nero un oggetto ideale opaco (ossia con coefficiente di trasmissione pari a zero) che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica che lo investe senza rifletterla e che sia in equilibrio termico con la radiazione in essa contenuta.



Il corpo nero assorbe dunque tutta l'energia incidente e, per il principio di conservazione, reirradia totalmente la quantità assorbita, dovendo quindi il suo nome unicamente all'assenza di riflessione; possiede perciò coefficiente di emissione uguale a quello di assorbimento e pari ad uno. I corpi reali invece si discostano più o meno sensibilmente da questa definizione e sono perciò detti corpi grigi. In altri termini si può dire che tutti i corpi reali si comportano più o meno come corpi neri a meno della loro riflettività e trasmissanza. Dal punto di vista visivo, un corpo nero può essere interpretato come una cavità dotata di un orificio che permette l'ingresso di radiazione elettromagnetica ma rende molto improbabile la sua uscita dallo stesso. Questo modello costituisce un'ottima approssimazione di corpo nero: basti pensare a un contenitore in cui sia stato fatto un piccolo foro: a temperatura ambiente il foro appare assolutamente nero, ed il motivo è che la radiazione luminosa che entra nel contenitore viene diffusa molte volte al suo interno, ed è molto più probabile che alla fine venga assorbita piuttosto che riesca ad uscire dallo stesso foro da cui è entrata. In questo modo la radiazione che entra nella cavità scalda le pareti, che riemettono, a temperatura ordinaria, principalmente radiazione infrarossa. Quando viene raggiunto l'equilibrio termodinamico l'energia elettromagnetica che entra nella cavità è uguale a quella irradiata dal foro, ma il tipo di radiazione

emesso dipende dalla temperatura della cavità. Da questo punto di vista si capisce allora che un corpo nero non è veramente nero: un oggetto come quello descritto sopra ci appare nero a temperatura ambiente perché assorbe radiazione visibile, quest'ultima viene convertita in radiazione nel dominio dell'infrarosso (a temperature ordinarie), in seguito all'assorbimento e riemissione da parte delle pareti, tali radiazioni risultando non visibile dall'occhio umano ci fanno apparire il foro come nero. Per temperature inferiori a 1000 K, lo spettro è essenzialmente tutto nella regione dell'infrarosso, successivamente comincia a comparire il visibile, a partire dal rosso, per poi includere tutte le frequenze (del visibile) fino a far apparire il corpo di color bianco. Il filamento di una lampadina a incandescenza ad esempio ha una temperatura intorno ai 3000 K, mentre la superficie del sole ha una temperatura prossima ai 6000 K.

Tuttavia, il modello del corpo nero non rappresenta unicamente un'approssimazione matematica astratta ma può essere ricondotta a molti esempi fisici concreti: ad esempio, il sole si comporta come un ottimo corpo nero. Per convincersi di ciò, consideriamo un cubo di lato 1 m e pratichiamo su di esso un piccolo foro circolare di raggio 1 mm; questo esempio riproduce in modo convincente la nostra definizione di corpo nero. Calcoliamo ora il rapporto tra la superficie del foro e il volume del cubo

$$\frac{S}{V} = \frac{\pi r^2}{L^3} = \frac{\pi \cdot 10^{-6}}{1^3} = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$$

Ora allo stesso modo prendiamo in esame il Sole, in cui la superficie emittente (corrispondente al foro del caso precedente) è costituita da tutta la superficie esterna della stella. Procediamo allo stesso calcolo:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3}{r} = \frac{3}{6.9 \cdot 10^8} \approx 10^{-8} \text{ m}^{-1}$$

siamo quindi notare un fatto piuttosto inatteso: il Sole è più adatto a esemplificare il comportamento di un corpo nero rispetto al modello stesso con cui lo abbiamo descritto. Nell'immagine riportata, si nota infatti come lo spettro emissivo del Sole in funzione della frequenza rispecchi quasi esattamente il modello del corpo nero associato a una temperatura di 6000 K.

Vediamolo un po' meglio.

Una stella o un pianeta è spesso modellato come un corpo nero e la radiazione elettromagnetica emessa da questi corpi come radiazione del corpo nero. La figura mostra una sezione trasversale molto schematica per illustrare l'idea. La fotosfera della stella, dove viene generata la luce emessa, è idealizzata come uno strato all'interno del quale i fotoni di luce interagiscono con il materiale nella fotosfera e raggiungono una temperatura comune T che si mantiene per un lungo periodo di tempo.

Alcuni fotoni sfuggono e vengono emessi nello spazio, ma l'energia che portano via viene sostituita dall'energia proveniente dall'interno della stella, cosicché la temperatura della fotosfera è quasi costante. I cambiamenti nel nucleo portano a cambiamenti nella fornitura di energia alla fotosfera, ma tali cambiamenti sono lenti (circa centomila anni) sulla scala temporale di interesse qui. Supponendo che queste circostanze possano realizzarsi, lo strato esterno della stella è in qualche modo analogo all'esempio di un involucro con un piccolo foro al suo interno, con il foro sostituito dalla trasmissione limitata nello spazio all'esterno della fotosfera. Con tutti questi presupposti, la stella emette radiazioni di corpo nero alla temperatura della fotosfera.

La teoria del Big Bang si basa sul principio cosmologico, che afferma che su larga scala l'Universo è omogeneo ed isotropo. Secondo la teoria, l'Universo circa un secondo dopo la sua formazione era un corpo nero quasi ideale in equilibrio termico a una temperatura superiore a 10^{10} K. La temperatura diminuiva man mano che l'Universo si espandeva e la materia e le radiazioni in esso contenute si raffreddavano. La radiazione cosmica di fondo a microonde osservata oggi è "il corpo nero più perfetto mai misurato in natura". Ha uno spettro di Planck quasi ideale a una temperatura di circa 2,7 K. Si discosta dall'isotropia ideale della radiazione del corpo nero solamente per una parte su centomila.

Una realizzazione pratica di un corpo che risulti nero a tutte le frequenze e temperature, che è di estrema importanza sia concettuale (per calcolarne lo spettro universale) sia empirica (per costruirlo in pratica) fu introdotto da Lummer e Wien, 1862 ed è la seguente. Si disponga di una cavità chiusa con pareti arbitrarie ma termalizzate alla temperatura T e perfettamente isolate dal mondo esterno. Si supponga di poter aprire, senza alterare l'equilibrio termico, un foro microscopico nella parete della cavità che consenta di misurare, senza alterarla, la radiazione in equilibrio alla temperatura T . Il foro in questione, visto dal di fuori, si comporta come un perfetto corpo nero. Infatti la radiazione emessa dal foro stesso sarà quella di un corpo alla temperatura T (la stessa che colpisce le pareti della cavità) mentre il foro stesso è in grado di assorbire completamente qualsiasi radiazione (tutta quella che colpisce il foro dall'esterno viene assorbita dal foro in quanto entra dalla cavità senza più uscirne) un po' come fa il portone di una casa che, anche in pieno giorno, appare nero! Ovviamente più sarà piccolo il rapporto tra superficie del foro e volume della cavità e più ideale sarà il comportamento di corpo nero del foro. Quindi è il foro che si comporta da corpo nero non le pareti della cavità (anche se il ruolo delle pareti è essenziale perché è a furia di rimbalzare tra le pareti della cavità che la radiazione verrà prima o poi termalizzata).

Introduciamo alcune grandezze preliminari per lo studio del corpo nero.

Iniziamo con l'osservare che lo spettro può essere descritto come sia come intensità della radiazione emessa da una superficie che come densità dell'energia contenuta in una cavità risonante.

Dunque si definisce *potere emissivo specifico* (o intensità specifica) l'energia emessa da un corpo alla temperatura T , per unità di tempo, per unità di superficie e per unità di frequenza:

$$e(\nu, T) \equiv I_\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} = \frac{dE}{dt dS d\nu} (W / m^2 s^{-1})$$

Per studiare l'assorbimento dei corpi, invece, si introduce la funzione *potere assorbente*, denotata con $a(\nu, T)$. Questa è definita, per ogni temperatura del corpo, come la frazione assorbita dell'energia incidente alla frequenza ν . Si noti che questa funzione, a differenza della $e(\nu, T)$ è adimensionale.

$$a(\nu, T) = \frac{E_{\text{incidente}}}{E_{\text{assorbita}}}$$

Il potere emissivo, come il potere assorbente, è una caratteristica del corpo considerato. Esisteranno corpi che hanno una grande capacità di emettere radiazioni e corpi che ne hanno meno. Ma applicando la seconda legge della termodinamica nel 1860 Kirchhoff scoprì una legge generale: mentre il potere emissivo e il potere assorbente cambiano da corpo a corpo il rapporto tra i due è una funzione universale dipendente solo dalla temperatura e dalla frequenza considerata, cioè

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

Ci si pose dunque il problema di capire cosa fosse questa funzione universale, Kirchhoff osserva che se si considera un corpo con potere assorbente uguale a 1 si ha che $e(\nu, T)$ prende il suo valore massimo ed inoltre che in quel caso la funzione universale cercata è proprio il potere emissivo.

$$\frac{e(\nu, T)}{1} = f(\nu, T) \Rightarrow e(\nu, T) = f(\nu, T)$$

Con semplici considerazioni dimostreremo che l'emittanza specifica del corpo $e(\nu, T)$ può essere espressa in termini della densità di energia delle onde elettromagnetiche all'interno della cavità $u(\nu, T)$ (energia per unità di volume per intervallo unitario di frequenza). Si ottiene infatti che, per una cavità chiusa di forma qualsiasi, l'energia incidente per unità di superficie sulle pareti al suo interno

è data da $(c/4) u(\nu, T)$, dove c è la velocità della luce. Immaginando quindi di aprire un foro microscopico nelle pareti della cavità stessa, questo foro, visto da fuori, avrà un'emissività data proprio da $(c/4) u(\nu, T)$. Poiché abbiamo visto che il foro si comporta come un corpo nero perfetto, avremo che l'emissività di un corpo nero è data da (Kirchoff 1859):

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

In altre parole l'emissività di un corpo nero alla temperatura T è proporzionale, frequenza per frequenza, alla densità di energia della radiazione di cavità (per una qualsiasi cavità) purché con pareti isolate e portate tutte alla stessa temperatura T .

Dimostrazione.

Partiamo dal proporci di voler calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo, ossia la potenza per unità di superficie (intensità). A tal fine indichiamo con $u(\theta)$ la densità di energia delle onde che si propagano nella direzione definita dall'angolo θ (tralasciamo per semplicità di scrittura la dipendenza da ν e da T).

Integrando in coordinate polari si ha

$$\int du(\theta) \equiv u = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u(\theta) \sin\theta d\theta$$

Dove u è la densità di energia totale. Se non ci sono direzioni preferenziali $u(\theta)$ sarà costante e potremo assumere,

$$u(\theta) = \frac{u}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta} = \frac{u}{4\pi}$$

Possiamo allora calcolare l'energia che incide su una superficie unitaria perpendicolare all'asse z per unità di tempo dovuta alle sole onde che si propagano in una data direzione θ (e φ qualsiasi) come

$$\frac{dP(\theta)}{dS} = \frac{dE(\theta)}{dt dS} = \frac{dE(\theta)}{dV} c_z = u(\theta) c \cos\theta$$

Dove c è la velocità della luce (evidentemente la componente lungo z di c è proprio c , essendo un invariante). Integrando la potenza per unità di superficie sul semispazio delle direzioni consentite (tutte le direzioni di propagazione in direzione positiva dell'asse z) avremo

$$\frac{dP}{dS} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{dP(\theta)}{dS} \sin\theta \, d\theta = cu \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}{4\pi} = cu \frac{2\pi(1/2)}{4\pi} = \frac{c}{4}u$$

In pratica il fattore $1/2$ al numeratore rispecchia il fatto che le onde stazionarie presenti nella cavità sono rappresentabili come onde viaggianti con direzione opposte, quindi solo metà dell'energia di un'onda stazionaria può viaggiare verso un dato elemento di superficie. Avremo quindi che l'energia incidente per unità di superficie e per unità di tempo è data da

$$\frac{dP}{dS} = \frac{c}{4}u$$

Se al posto dell'elemento di superficie sostituiamo il foro della cavità, la radiazione che vi incide è

$$e = \frac{c}{4}u \quad (W / m^2)$$

proprio quella emessa dal foro per cui l'emissività del foro deve valere:

Reintroducendo la dipendenza da ν , ossia considerando la potenza specifica si ha

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) \quad (W / m^2 s^{-1}) \quad \text{c.v.d.}$$

Che rappresenta quindi l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T , per unità di superficie, per unità di tempo e per unità di frequenza in tutte le direzioni.

Dimostrazione alternativa.

Si può partire anche considerando la densità di energia radiante (specifica) all'interno della cavità $u(\nu) = du/d\nu$. Consideriamo dunque la funzione $u(\nu, T)$ tale che $u(\nu, T) d\nu$ indica la quantità di energia posseduta dal campo elettromagnetico contenuto nell'unità di volume della cavità, ed avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$: cioè

$$u(\nu, T) = \frac{du}{d\nu} \quad (J / m^3 s^{-1}); \quad \text{densità di energia per unità di frequenza}$$

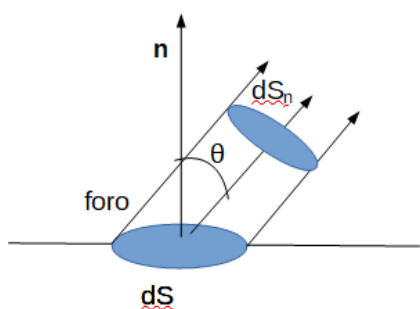
$$u(\nu, T) d\nu = du = \frac{\text{energia della radiazione avente frequenza compresa fra } \nu \text{ e } \nu + d\nu}{\text{unità di volume}} \quad (J / m^3)$$

Intanto si può affermare che la radiazione all'interno della cavità deve essere uniforme ed isotropa, altrimenti potrebbe realizzarsi un trasferimento spontaneo di energia da un punto all'altro, cosa impossibile se i punti sono alla stessa temperatura (come abbiamo ipotizzato).

Consideriamo dunque la radiazione emergente dal foro con superficie elementare dS . Poiché internamente alla cavità la radiazione si muove isotropicamente con velocità c , la potenza emessa nell'intervallo di frequenza $d\nu$ entro l'angolo solido $d\Omega$ intorno alla direzione θ rispetto alla normale \mathbf{n} al foro, vale evidentemente:

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = du \cdot dS \cdot c \cdot \frac{d\Omega}{4\pi}$$

Essa è infatti uguale alla densità di energia du (relativa all'intervallo $d\nu$) moltiplicata per il volume di un cilindro di base dS_n ed altezza c , e per il rapporto dell'angolo solido elementare $d\Omega$ rispetto all'angolo solido totale 4π , come si vede dalla seguente illustrazione.



Tenuto conto che $dS_n = dS \cos\theta$ e $du = u(\nu)d\nu$, l'intensità differenziale angolare o potere emissivo differenziale angolare (potenza per unità di superficie, nell'intervallo di frequenza $d\nu$, e per unità di angolo solido) vale:

$$\frac{d^2 I}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = \frac{d^2 (P / S)}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = \frac{1}{dS} \frac{d^2 P}{d\Omega d\nu} d\Omega d\nu = c \frac{u(\nu)}{4\pi} \cos\theta d\Omega d\nu$$

Integrando questa espressione rispetto a $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ (tenuto conto che l'integrale su θ vale $\frac{1}{2}$, mentre quello su ϕ vale 2π) si ottiene il potere emissivo, ossia l'intensità per unità di frequenza $dI/d\nu$ emessa sull'angolo solido del corpo nero:

$$e(\nu) d\nu \equiv \frac{dI}{d\nu} d\nu = \frac{c}{4} u(\nu) d\nu$$

(N.B. Data la seguente uguaglianza di funzioni reali A(x) e B(x)

$$A(x) dx = B(x) dx ; \quad [A(x) - B(x)] dx = 0$$

Esse risulteranno senz'altro uguali, dovendo essere A(x) = B(x) al fine di verificare l'uguaglianza).

Dunque si ha la seguente importante relazione che lega l'intensità specifica alla densità di energia specifica:

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

Verifichiamo che dimensionalmente la relazione è corretta

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv \frac{W}{m^2 s^{-1}} = \frac{c}{4} f(\nu, T) \equiv \frac{m}{s} \frac{J}{m^3 s^{-1}} = \frac{J}{s} \frac{1}{m^2 s^{-1}} = \frac{W}{m^2 s^{-1}}$$

Quindi tutto lo studio dello spettro del corpo nero consiste nell'identificare la funzione universale u(ν,T).

3 Leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann

Si definisce inoltre potere emissivo totale (o intensità totale) l'energia emessa da un corpo nero alla temperatura T, per unità di superficie, per unità di tempo, su tutte le frequenze

$$\varepsilon_{TOT} \equiv I_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu$$

Nel 1879 Josef Stefan scoprì sperimentalmente che l'intensità totale era proporzionale alla quarta potenza della temperatura e nel 1884 Ludwig Boltzmann la derivò per via teorica (usando l'elettromagnetismo classico e la termodinamica), in loro onore la costante di proporzionalità viene chiamata costante di Stefan-Boltzmann; quindi si ha

$$\varepsilon_{TOT} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \text{ (W / m}^2\text{)}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Lo spettro del corpo nero è uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma a "campana" dove il picco di emissione è la lunghezza d'onda a cui corrisponde la massima emissione (massima intensità) della radiazione emessa. Un primo importante risultato venne ottenuto nel 1893 dal giovane fisico austriaco Wien.

1° Legge di Wien (1893)

Da considerazioni teoriche, combinando termodinamica ed elettromagnetismo, riguardanti la radiazione chiusa in una cavità perfettamente assorbente (corpo nero) soggetta ad una compressione adiabatica (termodinamica più effetto doppler) Wilhem Wien ricavò la seguente espressione

$$u(\nu, T) \propto \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Questa legge contiene implicitamente la legge di Stefan-Boltzmann, infatti integrando su tutte le frequenze si ha

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu \propto \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c}{4} T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx = \text{cost} \cdot T^4$$

La proporzionalità deriva dal fatto che l'integrale è stato reso indipendente da T. La costante di proporzionalità potrà essere calcolata solo conoscendo esplicitamente la legge di emissività.

2° Legge di Wien (o legge dello spostamento di Wien) (1899)

Si notò che il picco di emissione è quello che caratterizza il colore di cui appare il corpo se scaldato a quella temperatura. Aumentando la temperatura il picco di emissione si sposta verso una lunghezza d'onda più piccola. Wien scoprì che il prodotto della lunghezza d'onda corrispondente al picco di emissione per la temperatura assoluta del corpo è sempre una costante.

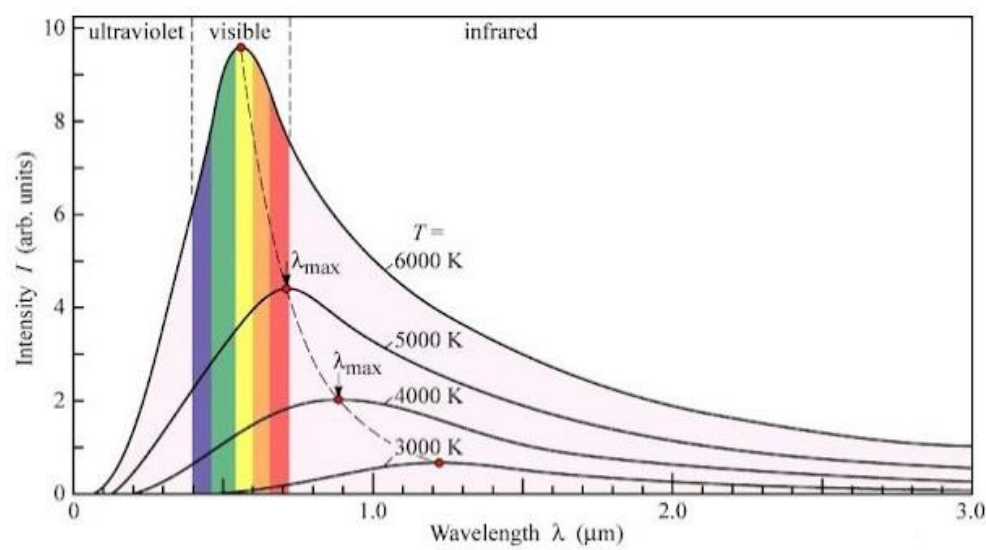
La legge dello spostamento di Wien si scrive pertanto: $\lambda_{\max} \cdot T = \text{cost.}$ ossia $\lambda_{\max} = \frac{\text{cost.}}{T}$

Quindi la lunghezza d'onda di picco risulta inversamente proporzionale alla temperatura.

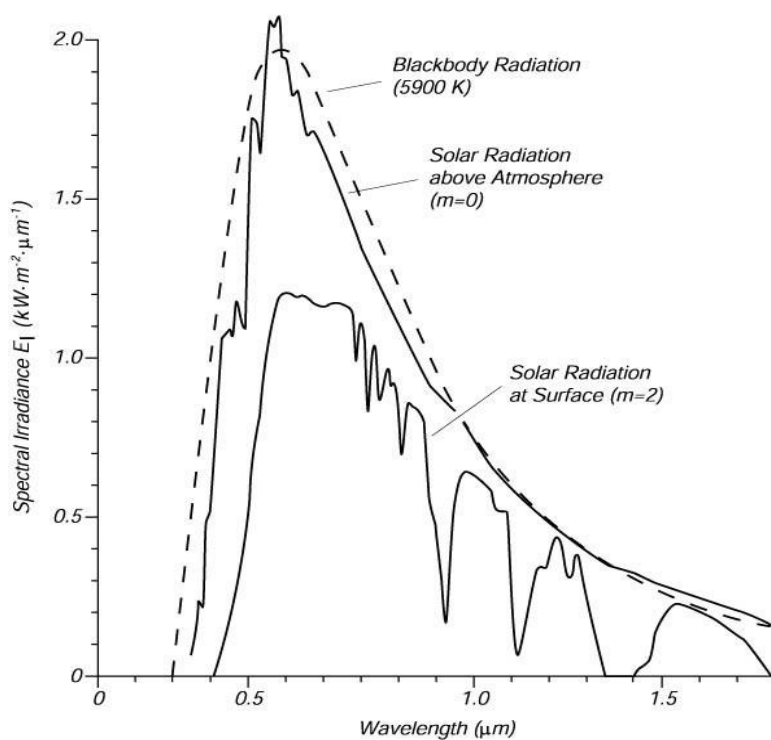
Numericamente si è trovato che la costante vale $2.89 \cdot 10^{-3}$ mK, dunque si ha;

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T} (m)$$

Tramite questa legge è possibile determinare la lunghezza d'onda di picco di qualunque corpo nero ad una certa temperatura (vedi illustrazione seguente). Se si pensasse di passare alla relazione per la frequenza usando la relazione $c = \lambda \nu$ si incapperebbe in un “fatal error”, come discusso più avanti.



Qui sotto invece è rappresentato il grafico del corpo nero ideale, quello reale solare al di sopra dell'atmosfera e di quello che arriva al suolo.



Viceversa dal colore emesso dal corpo nero (cioè dalla frequenza corrispondente) si può dedurre la sua temperatura. Ad esempio dal colore del Sole si può dedurre il picco di emissione (la frequenza del giallo/rosso) e quindi la sua temperatura di circa 5780 K.

Dallo spettro risultava anche evidente che al crescere della temperatura aumenta la quantità dell'energia irradiata che corrisponde all'area sottesa al grafico della "campana".

Lo spettro del corpo nero è quindi uno spettro continuo (cioè assume valori su tutte gli infiniti valori reali delle frequenze) con la tipica forma, come già detto, a "campana" dove il picco di emissione è determinato dalla legge di Wien.

Come si nota dal grafico più è bassa la temperatura più è alta la lunghezza d'onda del massimo della radiazione, senza nessun limite, se non lo zero assoluto, che non può essere raggiunto per il terzo principio della termodinamica. Un corpo nero può benissimo emettere ad esempio onde radio, con lunghezza d'onda da un 1 cm, se la sua temperatura è di 0,3 K, o raggi gamma, con lunghezza d'onda di 1 pm, se la sua temperatura è di 3 miliardi di gradi.

A tal proposito si veda quanto detto dell'osservazione finale di questo articolo.

Per avere una idea delle temperature presenti nel cosmo diciamo che il nucleo di una stella "media" come il nostro Sole, arriva a 15 milioni di gradi, (la temperatura più alta "prodotta" dall'uomo è quella necessaria per l'innesco di una bomba H, circa 300 milioni di gradi, che si ottiene facendo esplodere al centro della massa della bomba H una bomba a fissione, mentre negli esperimenti sulla fusione controllata di tipo tokamak ST40 nel 2022, si è raggiunta una temperatura di 100 milioni di gradi); stelle più massicce di quelle "medie" hanno temperature nel nucleo di 600 milioni di gradi, ma le temperature più alte nel cosmo si raggiungono nei nuclei delle Supernove, dove si arriva ad alcuni miliardi di gradi.

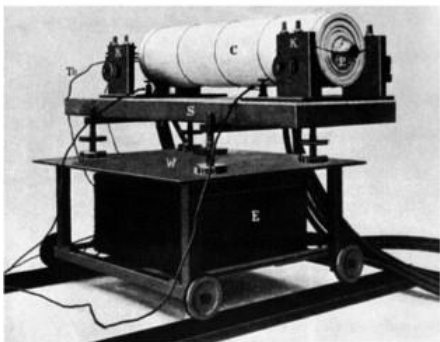
Gustav Kirchhoff stabilisce che a parità di frequenza e temperatura, materiali diversi si comportano in modo simile. Viene dunque ipotizzato che la radiazione di corpo nero sia una proprietà indipendente dalle proprietà del contenitore, e dunque di interesse generale.

Il termine ed il concetto di corpo nero, furono introdotti per la prima volta proprio da Kirchhoff nel 1860. In particolare, egli dimostrò che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente di un corpo, definisce una funzione che dipende esclusivamente dalla frequenza e dalla temperatura e per questo detta funzione universale $u(\nu, T)$ che risulta quindi indipendente dalla natura e dalla forma dei corpi:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = u(\nu, T)$$

La funzione $u(\nu, T)$ deve essere una funzione universale di T e ν (indipendente cioè da come è fatta la cavità: forma, materiali ecc....), altrimenti si violerebbe il secondo principio della termodinamica. Infatti se così non fosse, tra due cavità in contatto ottico (con un filtro F selettivo alla frequenza ν_0), inizialmente alla stessa T , ci sarebbe flusso di calore verso la cavità dove $u(\nu_0, T)$ è minore. Questo provocherebbe un riscaldamento di questa cavità, col che saremmo riusciti a spostare calore da un corpo più freddo ad uno più caldo come unico risultato di una trasformazione.

Kirchhoff, poi, definì corpo nero un corpo il cui potere assorbente è pari a 1, per ogni temperatura e frequenza. Da ciò segue che, la funzione universale $u(\nu,T)$ descrive proprio il potere emissivo di un corpo nero.



*Der electrisch geblähte „absolut schwarze“ Körper
und seine Temperaturmessung;
von O. Lummer und F. Kurlbaum.
(Vorgängen in der Sitzung vom 6. Mai 1898.)*

Apparato sperimentale di un corpo nero utilizzato da Lummer e Kurlbaum del 1898 costituito da un foglio di platino all'interno di un tubo di ceramica.

4 La formula di Rayleigh-Jeans

Al fine di determinare la forma della funzione universale, si possono percorrere due strade. La prima si basa sul principio di equipartizione dell'energia: si considera la radiazione presente all'interno della cavità (per unità di volume) e poi si valuta il numero dei gradi di libertà posseduta dalla radiazione avente frequenza compresa fra ν e $\nu + d\nu$, assegnando ad ogni grado di libertà un'energia cinetica pari a $\frac{1}{2} kBT$; questo metodo consentirà una immediata generalizzazione al caso quantistico. La seconda suppone che le molecole delle pareti si comportino come dipoli oscillanti (ovvero che dentro la cavità sia contenuto un sistema di dipoli oscillanti) e calcolare lo spettro dalla condizione che all'equilibrio ogni dipolo emetta ad ogni frequenza tanta energia quanta ne assorbe.

Calcolo basato sul principio di equipartizione dell'energia

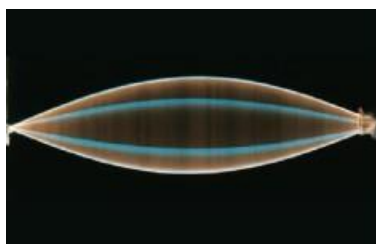
Descriviamo dapprima l'approccio classico di Rayleigh e Jeans. Si considera il corpo nero come una cavità, le cui pareti sono formate da oscillatori armonici, la *densità di energia* (J/m^3) in essa contenuta $u(\nu)$, nell'intervallo di frequenza compreso tra ν e $\nu + d\nu$, è

$$u(\nu) d\nu = \epsilon_{ave} N(\nu) d\nu$$

dove ϵ_{ave} rappresenta l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità, in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero dei modi di oscillazione delle onde stazionarie (per unità di volume) tra ν e $\nu + d\nu$ all'interno della cavità, che si assume di forma cubica di lato L .

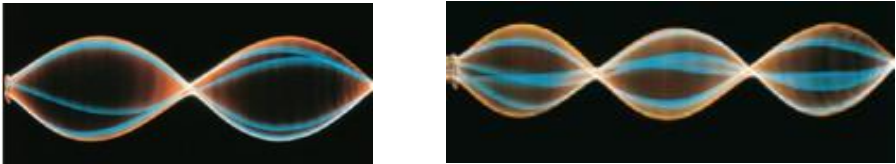
Piccola scheda sul significato di modi di oscillazione di un'onda stazionaria.

Pensiamo per esemplificare ad una corda di chitarra pizzicata al suo centro, si ottiene un moto come quello mostrato nella figura seguente.



Questa onda stazionaria ha sempre due punti fissi – detti nodi – che sono posizionati alle estremità della corda; tutti gli altri punti della corda si muovono ognuno di moto armonico in su e in giù lungo l'asse y (verticale), e rimanendo sempre nello stesso punto dell'asse x (orizzontale). Inoltre hanno

tutti la stessa frequenza e si muovono in fase, cioè raggiungono insieme sia il punto di massimo della propria oscillazione che di minimo. Pizzicando opportunamente la corda si ottengono altre modalità di oscillazione aventi un numero di nodi maggiore di quello fondamentale precedente. Per esempio si possono ottenere le seguenti situazioni:



La prima ha tre nodi, mentre la seconda ha quattro nodi. Ciascuna di queste particolari onde rappresenta un modo normale di oscillazione della corda.

Def. Si chiamano modi normali di oscillazione le onde stazionarie in cui tutti i punti della corda oscillano di moto armonico con la stessa frequenza.

Questa definizione è valida per tutti i tipi di onde, e si estende immediatamente al caso delle onde elettromagnetica ove si sostituisca la parola corda con quella di campo (elettrico e magnetico).

Affinché si instaurino onde stazionarie, bisogna richiedere che queste abbiano nodi alle estremità del cubo e, quindi, che nelle tre direzioni devono essere contenute un numero intero di semi-lunghezze d' onda:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{2L}{\lambda}, \quad n_x = 1, 2, 3, \dots \\ n_y &= \frac{2L}{\lambda}, \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \\ n_z &= \frac{2L}{\lambda}, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ogni terna $(n_x; n_y; n_z)$ corrisponde ad un possibile modo di un' onda stazionaria nella cavità. Perciò, possiamo considerare lo spazio tridimensionale degli interi $(n_x; n_y; n_z)$, in cui ogni punto è posto in corrispondenza biunivoca con un'onda stazionaria permessa. Il numero di onde stazionarie permesse nell' intervallo di lunghezza d' onda $[\lambda; \lambda + d\lambda]$, quindi, è uguale al numero di punti, a coordinate intere, nell' ottante positivo del guscio sferico compreso tra n e $n + dn$, con

$$n = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

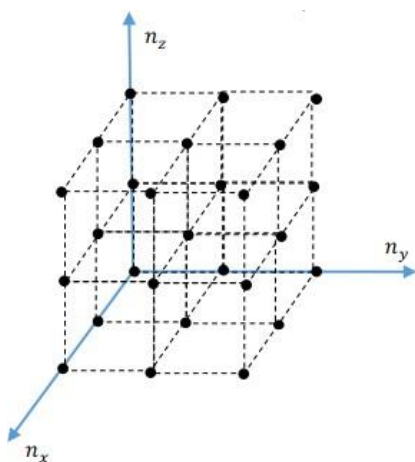


Fig. 1

Dal momento che il numero di modi è molto grande, lo spazio può essere considerato come continuo, perciò, il numero di punti a coordinate intere, nell'ottante positivo del guscio sferico, ben approssima il volume del guscio.

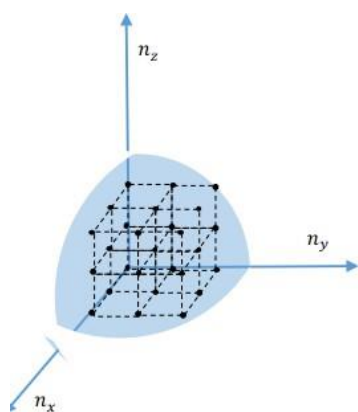


Fig. 2

Da ciò segue che il numero di onde stazionarie permesse è

$$dN = 2 \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn$$

dove il fattore 2 tiene conto dei due possibili stati di polarizzazione delle onde. Ricordando che

$$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2Lv}{c} \quad dn = \frac{2L}{c} dv$$

si ha

$$N(v) dv = \frac{8\pi L^3}{c^3} v^2 dv$$

La densità dei modi vibrazionali permessi si ottiene dividendo l'espressione precedente per il volume della cavità, ottenendo

$$N(v)dv=\frac{8\pi}{c^3}v^2dv$$

Adesso non rimane che calcolare l'energia media degli oscillatori, a tal fine viene utilizzata la distribuzione di Boltzmann che afferma che la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa fra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$ è

$$f(\epsilon)=Ce^{-\beta\epsilon}$$

dove C è una opportuna costante e $\beta=1/k_BT$ con k_B costante di Boltzmann, da ciò segue che il valor medio dell'energia è

$$\epsilon_{ave}=\frac{\int_0^{\infty}\epsilon f(\epsilon)d\epsilon}{\int_0^{\infty}f(\epsilon)d\epsilon}$$

Per cui sostituendo l'espressione della funzione nella precedente si ha

$$\epsilon_{ave}=\frac{\int_0^{\infty}\epsilon e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}{\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}$$

Ricordando che la seguente proprietà matematica:

$$\frac{d}{dx}\log(f(x))=\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

si ha che

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\beta}\log\left[\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon\right]&= -\frac{1}{\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}\frac{d}{d\beta}\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon= -\frac{1}{\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}\int_0^{\infty}\frac{d}{d\beta}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon= \\ &= -\frac{\int_0^{\infty}-\epsilon e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}{\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}=\frac{\int_0^{\infty}\epsilon e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}{\int_0^{\infty}e^{-\beta\epsilon}d\epsilon}=\epsilon_{ave} \end{aligned}$$

Dunque sfruttando questa uguaglianza possiamo scrivere

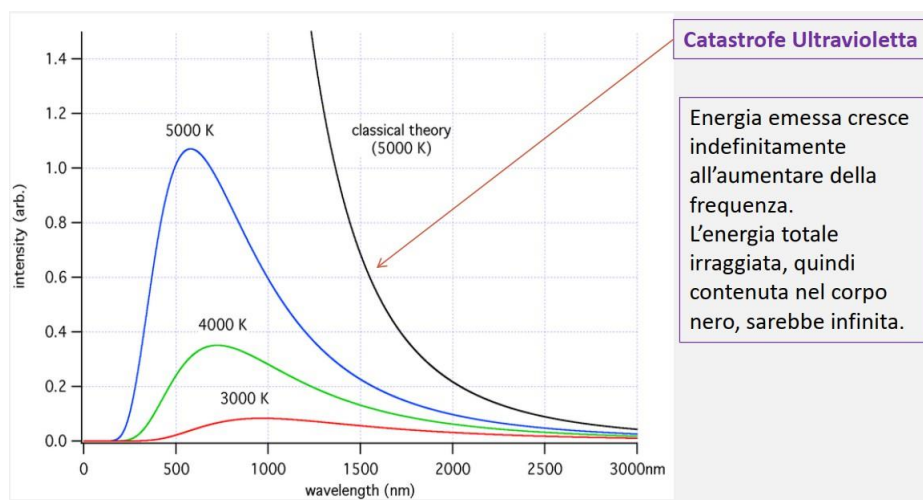
$$\epsilon_{ave} = - \frac{d}{d\beta} \log \left[\int_0^\infty e^{-\beta \epsilon} d\epsilon \right] = - \frac{d}{d\beta} \log \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta \epsilon} \right]_0^\infty = - \frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Questo risultato è noto come teorema dell'equipartizione dell'energia. Siamo ora in grado di scrivere il risultato del nostro calcolo noto come formula di Rayleigh-Jeans che descrive l'andamento della densità (spettrale) dell'energia

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

Dove si è introdotta la variabile temperatura nello scrivere la densità di energia, perché dal calcolo dell'energia media degli oscillatori è venuto fuori che essa dipende anche da T, quindi la densità di energia dipende in effetti a due variabili: frequenza e temperatura. Come si vedrà più avanti la stessa radiazione presente nella cavità potrà essere immaginata come composta da un insieme di "oscillatori".

Questa legge risulta in accordo con i risultati sperimentali per grandi lunghezze d' onda (o basse frequenze), mentre si discosta completamente per piccole lunghezze d' onda (o alte frequenze). La formula, infatti, prevede una densità di energia infinita per la frequenza che tende ad infinito e, quindi, emissioni altissime per lunghezze d'onda corrispondenti all' ultravioletto e ai raggi X. Questo problema, noto come "catastrofe ultravioletta", (vedi figura seguente) fu risolto da Planck nel 1900.



La prima parte del calcolo poteva svolgersi anche nel seguente modo.

Pensiamo alla cavità di forma cubica avente lato $L = 2a$

Le onde elettromagnetiche devono essere stazionarie e se pensiamo in una sola dimensione la condizione da imporre è

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2 \cdot 2a}{n} = \frac{4a}{n} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Ora anziché ragionare in termini della frequenza utilizziamo la pulsazione dove $\omega = 2\pi\nu$

ma d'altronde la velocità dell'onda è legata alla frequenza ed alla lunghezza d'onda tramite la seguente relazione $c = \nu \lambda$, quindi possiamo mettere in relazione la frequenza e con la lunghezza d'onda $\nu = c/\lambda$ ed inserendo la relazione precedente in questa relazione abbiamo i valori permessi della frequenza (che sono infiniti)

$$\nu_n = \frac{c}{4a} n \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (1)$$

Per passare al caso tridimensionale consideriamo un'onda diretta lungo l'asse x – pensiamo agli assi orientati lungo tre spigoli del cubo – sia $\mathbf{E}(x,t)$ il suo campo elettrico. L'onda avrà due stati di polarizzazione lungo y oppure lungo z, ma per ora consideriamo un solo stato, ad esempio lungo y, poi alla fine quando faremo il conto del numero dei gradi di libertà moltiplicheremo per 2. Dunque le condizioni al contorno impongono che sia $E_y = 0$ (ed anche $E_z = 0$) per $x = 0$ e per $x = 2a$.

L'onda può allora essere scritta come prodotto di una parte spaziale ed una temporale

$$E_y(x,t) = E_{0y} \sin(kx) \sin(\omega t) ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1')$$

Per soddisfare le condizioni al contorno l'onda deve annullarsi oltre che per $x = 0$ (cosa garantita dal fattore $\sin(kx)$), anche per $x = 2a$ e ciò comporta che sia

$$k(2a) = n\pi ; \quad \frac{2\pi}{\lambda} (2a) = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{4a}{n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (2)$$

In generale per un'onda orientata in direzione qualunque, scelto lo stato di polarizzazione, potremo scrivere le sue componenti secondo le diverse direzioni di vibrazione nella forma

$$\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_{0y} \sin(k_x x) \sin(\omega t) & k_x &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\alpha \\ E_z(y,t) &= E_{0z} \sin(k_y y) \sin(\omega t) & k_y &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\beta \\ E_x(z,t) &= E_{0x} \sin(k_z z) \sin(\omega t) & k_z &= \frac{2\pi}{\lambda} \cos\gamma \end{aligned}$$

dove i tre coseni sono i coseni direttori del vettore d'onda **k** secondo i tre angoli che esso forma con gli assi. Le condizioni al contorno impongono che sia

$$\begin{aligned} k_x(2a) &= n_1\pi & (4a/\lambda) \cos\alpha &= n_1 & n_1 &= 1, 2, 3, \dots \\ k_y(2a) &= n_2\pi & \rightarrow & & (4a/\lambda) \cos\beta &= n_2 & n_2 &= 1, 2, 3, \dots \\ k_z(2a) &= n_3\pi & & & (4a/\lambda) \cos\gamma &= n_3 & n_3 &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Quadrando e sommando otteniamo la condizione che deve essere soddisfatta da λ per garantire le richieste condizioni al contorno

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (4a/\lambda)^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = \frac{16a^2}{\lambda_n^2}$$

$$\lambda_n = \frac{4a}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \quad (3)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Tenuto conto che $\lambda v = c$, per la frequenza si ha

$$v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{4a} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (4)$$

Che rappresenta l'estensione tridimensionale della (2).

Da ciò segue che se **r** è il vettore posizione nello spazio delle fasi che individua in coordinate cartesiane i numeri interi positivi n_1, n_2, n_3 , - cioè $r = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$ (5) - i modi di vibrazione permessi per la radiazione sono rappresentati dai punti posti ai vertici del reticolo con coordinate intere positive, cioè giacenti nell'ottante positivo. Si nota che la densità dei punti reticolari è di un punto per unità di volume (ogni celletta cubica condivide con i suoi vicini 8 vertici (punti)), per cui il numero $N(r) dr$ dei modi di vibrazione corrispondenti ad un valore di r compreso fra r e $r + dr$ è pari semplicemente al volume della porzione di guscio sferico di raggio r e spessore dr contenuta nel primo ottante, cioè si ha (si vedano le figure (1) e (2) precedenti):

$$N(r) dr = \frac{\pi}{2} r^2 dr$$

Tenendo conto della (5) la (4) può essere scritta nel seguente modo $v_n = \frac{c}{4a} r$

da cui differenziando $dv = \frac{c}{4a} dr$

quindi il numero dei modi di vibrazioni permessi, contenuti dell'intervallo di frequenza fra ν e $\nu + d\nu$ è

$$N(\nu) d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4a}{c} \right)^3 \nu^2 d\nu$$

Ricordando che il volume della cavità è $V = (2a)^3$

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{2 c^3} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

Ed infine occorre dividere per V in modo da riferirsi all'unità di volume e moltiplicare per 2 ricordandosi dei due modi possibili della polarizzazione: in definitiva otteniamo per la densità dei modi vibrazionali permessi

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

Per completare il discorso occorre moltiplicare questo valore per l'energia media assegnata ad ogni grado di libertà dal principio di equipartizione dell'energia, che in questo caso trattandosi di oscillazioni oltre al contributo $\frac{1}{2}kT$ dovuto all'energia cinetica occorre sommare anche il contributo $\frac{1}{2}kT$ dovuto all'energia potenziale. In definitiva otteniamo per la **densità di spettrale dell'energia** quella che è nota come formula di **Rayleigh-Jeans**:

$$du = f(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu$$

ossia:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (7)$$

Oppure richiamando la formula del potere emissivo si ha

$$\varepsilon(\nu) = \frac{c}{4} f(\nu) d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 d\nu \quad (7')$$

Per ottenere la radiazione totale emessa dal corpo nero occorre integrare l'espressione precedente:

$$I_{totale} = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k_B T d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty$$

Come si vede la funzione universale trovata basandosi sulla fisica classica porta ad un risultato assurdo, una intensità infinitamente grande (catastrofe ultravioletta).

Se si fa il vuoto in un recipiente (cavità) a pareti opache, all'interno di esso resta soltanto la radiazione elettromagnetica creata dalla agitazione termica degli atomi delle pareti questa radiazione devono soddisfare le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo classico. In particolare il campo elettrico deve soddisfare le equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

dove $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$

Una volta trovato il campo elettrico, il campo magnetico si ottiene direttamente dalla relazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9)$$

E' sufficiente quindi risolvere solo la (8).

Siccome la radiazione è confinata in un volume V finito, il campo elettrico deve soddisfare oltre la (1) anche le condizioni al contorno imposte dalle pareti della cavità. Sfruttando il fatto che la funzione universale deve essere indipendente dal materiale della cavità scegliamo per semplicità le pareti conduttrici in modo che la componente parallela di \mathbf{E} e la componente normale di \mathbf{B} alla superficie risultino nulle.

Ricordando la (1') si nota che il campo può essere espresso come prodotto di due funzioni una spaziale ed una temporale, in quanto esse sono disaccoppiate. Cerchiamo dunque una soluzione della (8) del tipo a variabili separate.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = p(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

dove $p(t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ sono due funzioni da determinare. Sostituendo solo nella prima delle (8) (la seconda equazione che esprime la divergenza nulla significa solo che il nostro sistema è privo di cariche, infatti stiamo supponendo che nella cavità ci sia il vuoto) si ha

$$p(t) \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} p(t) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (11)$$

dividendo per $p(t)$ otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = 0$$

dividendo ora per $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ si ha

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})}{\mathbf{u}(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{p}(t)}{p(t)}$$

Questa uguaglianza può essere verificata solo se entrambi i membri dell'equazione sono costanti.

Infatti il primo membro è una funzione di t , il secondo di x, y, z , se facciamo variare t , ad esempio, il secondo membro non varia; allora anche il primo non deve variare se vogliamo che l'uguaglianza sia soddisfatta. E viceversa se facciamo variare x, y, z .

Per ragione di opportunità, che sarà evidente tra poco, chiamiamo $-k^2$ questa costante che è detta costante di separazione. Allora l'equazione precedente nel seguente sistema

$$\ddot{p}(t) + k^2 c^2 p(t) = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

Osserviamo che al fine di avere soluzioni limitate nel tempo deve risultare $k^2 > 0$, si esclude quindi k immaginario, a parte questa restrizione k può essere un qualsiasi numero reale.

La (12) è proprio l'equazione di un oscillatore armonico semplice appena si ponga la pulsazione ω uguale a kc , allora la (12) e (13) divengono:

$$\frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \omega^2 p(t) = 0 \quad (\omega = ck; \quad \omega > 0) \quad (14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (15)$$

L'equazione (14) ha due soluzioni linearmente indipendenti. Come base delle soluzioni possiamo prendere le funzioni seno e coseno, avendosi

$$p(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t \quad (16)$$

Questa soluzione, come noto può anche esprimersi come:

$$p(t) = A \cos(\omega t + \varphi); \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{con } \varphi \text{ una opportuna costante di fase.}$$

oppure usando la notazione esponenziale:

$$p(t) = \text{Re}[A e^{i(\omega t + \varphi)}] \quad (17)$$

L'equazione (15) è detta equazione di Helmholtz, essa va intesa come equazione agli autovalori.

Per mettere in evidenza questo, possiamo riscriverla così:

$$\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r})$$

La teoria ci dice che un'equazione siffatta ammette soluzioni solo per certi valori della costante k (oppure di ω) l'insieme di questi valori prende il nome di spettro degli autovalori, che può essere discreto o continuo a seconda del tipo di equazione e di condizioni al contorno. Ad ogni autovalore

corrisponde una o più soluzioni dette autofunzioni. Quando le soluzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore sono più di una, si dice che quell'autovalore è degenere.

Occorre dunque trovare quei particolari valori di k e i corrispondenti autovettori $\mathbf{u}=\mathbf{u}(k)$ che soddisfano l'equazione. La teoria mostra la soluzione della (15) è

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = C_3 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + C_4 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18)$$

dove le costanti possono essere in generale complesse ed arbitrarie e dipendono dalle condizioni al contorno. La teoria mostra che è possibile dimostrare che esiste sempre un insieme di autofunzioni della (15) che sono reali e che soddisfano le condizioni di ortonormalità

$$\int_V \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV = \delta_{ab} = \begin{cases} 0 & \text{per } a \neq b \\ 1 & \text{per } a = b \end{cases} \quad (19)$$

E che costituiscono un insieme completo di autofunzioni, nel senso che ogni soluzione della (15) che soddisfi le condizioni al contorno imposte può essere espressa come combinazione lineare di un insieme completo di autofunzioni della (15), ortonormali fra loro, con coefficienti dipendenti dal tempo e soddisfacenti l'equazione (14) con $\omega = \omega_a$:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a p_a(t) \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (20)$$

Dove si è introdotta la costante $1/\epsilon_0^{1/2}$ per opportunità. Dunque le funzioni spaziali $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ soddisfano le relazioni di ortonormalità (19) e sono un insieme completo di autofunzioni, aventi gli autovalori ω_a . In accordo con la (9) il campo magnetico è ora

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_a q_a(t) \nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \quad (21)$$

dove i coefficienti q_a sono legati ai coefficienti $p_a(t)$ dalla relazione $\frac{dq_a(t)}{dt} = p_a(t)$, del tutto analoga alla relazione che lega l'impulso allo spostamento di un oscillatore armonico (di massa unitaria). Nel caso del campo elettromagnetico alle autofunzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ si dà il nome di *modi caratteristici* del campo ed agli autovalori ω_a si dà il nome di *frequenze caratteristiche* dei modi di oscillazione. Le (20) e (21) sono allora gli sviluppi dei campi in termini dei modi caratteristici.

Siamo ora in grado di determinare l'energia totale del campo elettromagnetico all'interno della cavità. Essa è data in accordo con l'elettromagnetismo classico

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 B^2) dV$$

Sostituendo in questa espressione gli sviluppi (20) e (21) si ha

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_a \int_V p_a q_a \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_b(\mathbf{r}) dV + \frac{c^2}{2} \sum_{a,b} \int_V [\nabla \times \mathbf{u}_a(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{u}_b(\mathbf{r})] dV \quad (22)$$

Adesso occorre un po' di matematica.

Il primo termine an secondo membro si calcola facilmente ricordando le relazioni di ortonormalità (19), e vale semplicemente $\frac{1}{2} \sum_a p_a^2$. Il secondo termine è più ostico ed occorre usare l'identità vettoriale $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$, usando la seconda delle (11) e la (15) e l'identità vettoriale $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ si ha

$$(\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = \nabla \cdot (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b$$

Integriamo ora sul volume V della cavità ed applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega^2}{c^2} \int_V \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_b dV + \int_S (\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} dS$$

Dove S è la superficie che racchiude il volume V ed n è il versore normale all'elemento di superficie dS. Questo integrale superficiale è nullo, infatti

$$(\mathbf{u}_a \times \nabla \times \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) = 0 \text{ su } S$$

In virtù delle condizioni di contorno che la componente parallela di **E** e la componente normale di **B** alla superficie risultino nulle che impongono che il campo **E** (e quindi ciascuna delle \mathbf{u}_a) sia parallelo alla normale **n**. infine usando le condizioni di ortonormalità abbiamo

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_a) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_b) dV = \frac{\omega_b^2}{c^2} \delta_{a,b} \equiv \frac{\omega_a^2}{c^2}$$

Dunque anche le funzioni $\nabla \times \mathbf{u}_a$ sono ortogonali fra loro.

Finalmente possiamo scrivere l'energia totale nel volume della cavità in termini delle funzioni (ancora da determinare) p(t) e q(t):

$$\mathcal{E} = \sum_a \left(\frac{1}{2} p_a^2 + \frac{1}{2} \omega_a^2 q_a^2 \right) \quad (23)$$

Si riconosce immediatamente che l'espressione fra parentesi è proprio l'energia meccanica di un oscillatore, più precisamente è la sua hamiltoniana perché le due variabili sono nello spazio delle fasi.

Questo risultato è molto importante perché mostra che l'energia del campo elettromagnetico può esprimersi come somma di tanti oscillatori armonici semplici (di massa unitaria) di frequenza uguali alle frequenze proprie dei modi della cavità. Questi oscillatori sono tanti quanti i modi caratteristici della cavità e sono completamente disaccoppiati dato che l'energia totale è semplicemente la somma delle energie dei singoli oscillatori e manca ogni termine di interazione. **E' dunque possibile pensare ad un modello che per quanto riguarda l'energia del campo essa sia equivalente alla somma delle energie di un insieme di oscillatori armonici indipendenti.**

Dal punto di vista termodinamico la radiazione nella cavità si comporta come un "gas di oscillatori armonici". Ora ci proponiamo di calcolare esplicitamente le autofunzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ e le frequenze ω_a .

Il numero dei modi caratteristici (e quindi quello degli oscillatori) in una cavità dipende in generale dalla forma e dalla natura di essa. Dal punto di vista matematico questo equivale a dire che il numero di autofunzioni indipendenti della (15) dipende dalle condizioni al contorno. A temperatura ambiente l'emissione di corpo nero ha un massimo intorno ai 10 μm (infrarosso), quindi praticamente in tutti i casi realizzabili le dimensioni del recipiente sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione, è sensato pensare allora che in queste condizioni le condizioni al contorno e al forma del recipiente non abbiano importanza.

Supponiamo allora per semplicità di avere un contenitore cubico di spigolo L e se $L \gg \lambda$ i risultati avranno validità generale. Come condizione al contorno imponiamo che i campi siano periodici. La ragione per cui è comodo imporre le condizioni al contorno periodiche è che i campi possono esprimersi in serie tripla di Fourier e le funzioni $\mathbf{u}_a(\mathbf{r})$ diventano semplici funzioni trigonometriche. Il campo elettrico ad esempio risulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_{l,m,n} A_{l,m,n}(t) \cos \left[\frac{2\pi}{L} (lx + my + nz) + \phi_{l,m,n}(t) \right] \quad (24)$$

Dove l, m ed n sono degli interi, $A_{l,m,n}(t)$ e $\phi_{l,m,n}(t)$ funzioni solo del tempo, il versore $\mathbf{e}_{l,m,n}$ dà la direzione della componente di Fourier di indici l, m, n .

Le quantità $A_{l,m,n}(t)$ e $\phi_{l,m,n}(t)$ sono l'ampiezza e la fase del modo di indici l, m, n . E conveniente introdurre il vettore d'onda \mathbf{k} di componenti

$$k_x = (2\pi/L) l; \quad k_y = (2\pi/L) m; \quad k_z = (2\pi/L) n \quad (25) \quad \text{con } l, m, n \text{ interi. Allora la (24) diventa}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \mathbf{e}_k A_k(t) \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_k(t)] \quad (26)$$

Dove la somma va fatta su tutti i valori permessi dalla (25). Sostituendo la (26) nell'equazione d'onda (8) si arriva all'equazione agli autovalori analoga alla (15) che fornisce le frequenze dei modi caratteristici: $\omega = c k$ (27) ovvero in termini di l, m, n :

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{L} \right)^2 (l^2 + m^2 + n^2) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}) \quad (28)$$

La (27) viene detta relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Introducendo la relazione $\lambda = 2\pi/k$ e la frequenza $\nu = \omega/2\pi$ la relazione di dispersione (27) diventa:

$$\lambda \nu = c \quad (29)$$

Il valore di ω può essere qualunque fra zero ed infinito e quindi il numero dei modi dell'onda elettromagnetica confinata in una cavità è infinito. Quello che si può fare è di determinare il numero dei modi che hanno frequenze comprese fra ω e $\omega + d\omega$ o in termini finiti nell'intervallo $\Delta\omega$, cioè la cosiddetta densità dei modi. Per fare questo calcolo osserviamo che dalle (25) segue che il numero dei valori di \mathbf{k} con k_x compreso nell'intervallo Δk_x , k_y compreso nell'intervallo Δk_y , e k_z compreso nell'intervallo Δk_z è dato da

$$\Delta N_k = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (30)$$

Si nota per inciso che dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ applicata alla (24) segue la seguente relazione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_k = 0$ che esprime il fatto che le onde elettromagnetiche sono trasversali (\mathbf{E} e \mathbf{B} ortogonali al vettore \mathbf{k} , che in un mezzo isotropico definisce la direzione di propagazione dell'onda). Quindi per ogni valore di \mathbf{k} vi sono solo due direzioni indipendenti per \mathbf{E} , corrispondenti a due stati di polarizzazione diversi. A ciascun stato di polarizzazione corrisponde una soluzione indipendente delle equazioni di Maxwell e quindi il numero di modi indipendenti N_k con vettori \mathbf{k} compresi in $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ si ottiene moltiplicando per due la (30) che diventa (essendo $L^3 = V$):

$$\Delta N_k = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \quad (31)$$

Ma a noi interessa il numero dei modi di ω compreso in un $\Delta\omega$ fissato e la relazione di dispersione (27) mostra che ω dipende solo dal modulo di \mathbf{k} e non dalla sua direzione. E' necessario determinare quindi il numero dei modi della cavità aventi k compreso in un intervallo fissato Δk . Per fare questo osserviamo che la "spaziatura" tra i vettori d'onda appartenenti a due modi contigui (tali cioè che gli indici l, m ed n differiscano di ± 1) vale $2\pi/L$, in accordo con le (25) e quindi per dimensioni del recipiente molto maggiori delle lunghezze d'onda in gioco, risulta $\Delta k/k \approx \lambda/L \ll 1$. In queste condizioni si può pensare che i vettori d'onda \mathbf{k} dei modi abbiano una distribuzione continua. Allora l'elemento di volume dello spazio delle fasi \mathbf{k} è $dk_x dk_y dk_z$ e la (31) diventa

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z$$

Il numero di modi aventi modulo k compreso nell'intervallo $k, k + dk$ si ottiene immediatamente passando alle coordinate polari ed integrando sull'intero angolo solido, avendosi:

$$dN_k = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk \quad (\text{modi con } k \text{ entro } dk)$$

Infine il numero di modi con ω compreso fra ω ed $\omega + d\omega$ si ottiene dalla relazione $\omega = ck$, dunque

$$dN_\omega = \frac{2V}{(2\pi)^3} (4\pi) \omega^2 d\omega \quad (\text{modi con } \omega \text{ entro } d\omega)$$

Oppure in termini della frequenza ($\nu = \omega/2\pi$)

$$dN_\nu = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (33)$$

Riassumendo: il campo elettromagnetico in una cavità può essere scomposto in un numero infinito, ma numerabile, di modi caratterizzati dal vettore d'onda \mathbf{k} e dallo stato di polarizzazione. Ad ogni modo caratteristico corrisponde un oscillatore armonico di frequenza legata al modulo di \mathbf{k} dalla relazione di dispersione $\omega = ck$. Questi oscillatori sono indipendenti fra loro. Il numero di oscillatori aventi frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è dato dalla (33)

$$\rho(\nu) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 \quad (34)$$

Ad essa viene data il nome di *densità spettrale dei modi*, che come si vede dalla formula cresce con il quadrato della frequenza.

Con questo calcolo termina la trattazione elettromagnetica del campo in una cavità, per completare lo studio occorrerà moltiplicare la densità spettrale dei modi con la loro energia media. Per far questo occorrerà trattare come già anticipato il sistema degli oscillatori come fosse un gas di oscillatori posti in equilibrio termodinamico ad una certa temperatura T .

In termodinamica si chiama "gas" qualsiasi sistema formato da un grande numero di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Consideriamo allora un sistema formato da un numero N molto grande di particelle identiche debolmente interagenti tra loro. Supponiamo di poter numerare gli stati dinamici di ogni singola particella, indicandoli con il pedice s che può assumere un numero discreto o continuo di valori.

Nel caso classico lo stato dinamico di una particella è individuato dal valore delle tre componenti del suo impulso e delle tre componenti della sua posizione. La legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann dice che in condizioni di equilibrio termodinamico il numero medio di particelle in certo

stato s è dato da $n_s = A e^{-\epsilon_s / k_B T}$ (35) dove ϵ_s è l'energia associata allo stato s . La costante A è una

costante di normalizzazione determinata dalla condizione $\sum n_s = N$ dove la somma è chiaramente estesa a tutti i possibili stati dinamici della particella. I numeri n_s vengono chiamati numeri di occupazione dello stato s . La (35) mostra che stati di uguale energia hanno uguali popolazioni, e che stati s ed s' hanno popolazioni che stanno nel seguente rapporto

$$\frac{n_{s'}}{n_s} = e^{-(\varepsilon_{s'} - \varepsilon_s)/k_B T}$$

mentre l'energia totale del gas sarà $\mathcal{E} = \sum_s n_s \varepsilon_s$ e l'energia media riferita ad una singola particella

è

$$\varepsilon_{ave} = \frac{\mathcal{E}}{N} = \frac{\sum_s n_s \varepsilon_s}{\sum_s n_s} = \frac{\sum_s \varepsilon_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}}{\sum_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}} \quad (36)$$

Osservando che ponendo

$$Z = \sum_s e^{-\varepsilon_s/k_B T}$$

Risulta identicamente per l'energia media della particella

$$\varepsilon_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Alla funzione Z viene data il nome di funzione di partizione.

Lo stato di una particella nello spazio delle fasi determinato dalle tre coordinate spaziali e dalle tre coordinate della quantità di moto è individuato da un punto su tale grafico. Siccome gli stati di una particella classica costituiscono un insieme continuo, è necessario passare dalle sommatorie agli integrali aventi elementi di volume $dp_x dp_y dp_z dx dy dz$. Ora andiamo a considerare il nostro caso di N oscillatori armonici classici unidimensionali. Lo stato di ogni singolo oscillatore è determinato da una sola coordinata q e da un solo impulso coniugato p . L'elemento di volume sarà ora $dp dq$, ricordiamo che l'energia di un oscillatore è

$$\varepsilon = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \text{ dove } \omega \text{ è la pulsazione.}$$

La funzione di partizione diventa

$$Z = \int e^{-\varepsilon/(k_B T)} d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2k_B T}\right] dp dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2 q^2}{2k_B T}\right) dq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2k_B T}\right) dp = \frac{2\pi}{\omega} k_B T \quad (37)$$

Avendo usato l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Dunque l'energia media diventa ora

$$\mathcal{E}_{ave} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{2\pi}{\omega} k_B T \right) = k_B T^2 \frac{1}{T} = k_B T$$

In base alla meccanica classica l'energia media di ogni oscillatore del gas è $k_B T$.

E' questo un caso particolare del principio di equipartizione dell'energia che afferma che ad ogni termine del tipo ax^2 che compare nell'energia classica di un sistema (espressa in funzione delle coordinate generalizzate p e q) compete in media un'energia termica di $\frac{1}{2} k_B T$. Nel nostro caso di un oscillatore armonico $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia cinetica e $\frac{1}{2} k_B T$ compete all'energia potenziale.

Ultimo passo per arrivare in vetta. Siccome gli oscillatori del campo elettromagnetico sono indipendenti, è possibile applicare direttamente il teorema dell'equipartizione dell'energia ed affermare che se il campo elettromagnetico è confinato in una cavità alla temperatura T in condizioni di equilibrio termodinamico ad ogni oscillatore è associato una energia media $k_B T$.

Alfine la densità spettrale dell'energia sarà semplicemente il prodotto della densità spettrale dei modi (34) per l'energia associata a ciascun modo dell'oscillatore

$$\rho(\nu, T) = \frac{8V\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ma a noi interessa questa quantità riferita all'unità di volume, dunque finalmente

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (38)$$

Riottenendo così per altra via (molto più labriosa) la formula di Rayleigh-Jeans.

Vogliamo concludere mostrando ancora un altro percorso possibile per arrivare a questa formula, questa volta sfruttando il potenziale vettore.

Ci proponiamo dunque ancora la densità di energia della radiazione $u(v,T)$ in equilibrio termico alla temperatura T . Dividiamo il calcolo in due parti (i) la descrizione della radiazione con la determinazione dei gradi di libertà (ii) la determinazione statistica di equilibrio.

Consideriamo una cavità cubica di lato L e prendiamo un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del cubo e gli assi paralleli agli spigoli. Il campo elettromagnetico nella cavità può essere descritto dal solo potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ che obbedisce alla seguente equazione delle onde.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (39)$$

E alla condizione di gauge (di Coulomb) $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = 0$ (40).

Il campo $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ è definito per x_i appartenente all'intervallo $[-L/2, +L/2]$ e si può quindi sviluppare in serie (tripla) di Fourier, ottenendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \mathbf{a}_{n_1 n_2 n_3}(t) \exp \left[i \frac{2\pi}{L} (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) \right] \quad (41)$$

Ponendo

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3); \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}; \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

la (41) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i = -\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n(t) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (42)$$

La (39) ci dà per i coefficienti $\mathbf{a}_n(t)$ l'equazione

$$\ddot{\mathbf{a}}_n(t) = -c^2 k^2 \mathbf{a}_n(t) = -\omega^2 \mathbf{a}_n(t) \quad (43)$$

Dove si è posto $\omega = ck$, con $k = |\mathbf{k}|$, la cui soluzione è

$$\mathbf{a}_n(t) = \mathbf{a}_{n+} e^{i\omega t} + \mathbf{a}_{n-} e^{-i\omega t} \quad (44)$$

La condizione che \mathbf{A} sia reale ci dà per la (42) la relazione $\mathbf{a}_n^*(t) = \mathbf{a}_{-n}^*(t)$ da cui per la (44) si ricava

$a_{n+}^*(t) = a_{-n-}(t)$. Ponendo ora $a_{n-}(t) = a_n(t)$; $a_{n+}(t) = a_{-n}^*(t)$ e cambiando nella sommatoria con a_{n+} in $-n$, lo sviluppo di \mathbf{A} si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) + \mathbf{a}_n^* \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$$

Che come si vede è una quantità reale.

A questo punto la condizione di gauge diventa $\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{a}_n = 0$, vale a dire che per ogni terna (n_1, n_2, n_3) , per cui $\mathbf{k} = \mathbf{k}_n$, risulta fissato, \mathbf{a}_n deve essere ortogonale a \mathbf{k} . Fissiamo allora nel piano ortogonale a \mathbf{k} una coppia di vettori ortogonali $\mathbf{e}_n^{(1)}$ ed $\mathbf{e}_n^{(2)}$, in modo che essi insieme con il versore \mathbf{k}/k formino una terna di vettori ortogonali, congruente con quella degli assi coordinati. Allora \mathbf{a}_n si potrà scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{e}_n^{(1)}$ e $\mathbf{e}_n^{(2)}$

$$\mathbf{a}_n = \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)}$$

Allora il campo del potenziale vettore si può scrivere nel seguente modo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n_i=-\infty}^{+\infty} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{a}_n^{(\lambda)} \mathbf{e}_n^{(\lambda)} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + c.c. \quad (45)$$

Dove c.c. indica il complesso coniugato. Quello della (45) viene chiamato lo sviluppo dei modi normali. Il termine generico dello sviluppo è un'onda piana di ampiezza (complessa) $\mathbf{a}_n^{(\lambda)}$, polarizzazione $\mathbf{e}_n^{(\lambda)}$, vettore di propagazione \mathbf{k} e pulsazione ω .

Le funzioni $\mathbf{e}_n^{(\lambda)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ per i dati valori di n e λ sono le soluzioni delle equazioni (39) e (40) ed il loro insieme costituisce una base ortonormale di funzioni, nella quale una generica soluzione $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ può essere sviluppata.

Il fatto che il dominio su \mathbf{x} sia il cubo di volume finito L^3 ha una notevole conseguenza che questa base risulta numerabile. Infatti un elemento della base è caratterizzato dalla quaterna di numeri interi (n_1, n_2, n_3, λ) dove n_i è un intero e $\lambda = 1, 2$. A ogni quaterna corrisponde un grado di libertà, che corrisponde a un modo normale di oscillazione del campo.

Mentre $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ corrisponde a un ben definito sviluppo (45), la radiazione termica della cavità va pensata come una sovrapposizione incoerente di campi, che può essere descritta assegnando ai vari modi di oscillazione solo dei pesi statistici, che saranno fissati dalle leggi della meccanica statistica.

Dato che i gradi di libertà sono del tutto indipendenti fra loro e supponendo che a modi di oscillazione con la stessa frequenza corrisponda in media la stessa energia, la densità (spettrale) di energia $u(\nu, T)$ si potrà scrivere come prodotto di due fattori

$$u(\nu, T) = \rho(\nu) w(\nu, T) \quad (46)$$

dove

$$\rho(\nu) = \frac{dN}{dV d\nu}$$

rappresenta il numero di modi di oscillazione per unità di volume e per unità di intervallo di frequenza e $w(\nu, T)$ è l'energia media che compete a un singolo modo di oscillazione con frequenza ν , all'equilibrio termico alla temperatura T .

Il calcolo per determinare $\rho(\nu)$ e $w(\nu, T)$ è del tutto analogo a quello effettuato precedentemente, avendosi

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2; \quad w(\nu, T) = k_B T$$

Riottenendo così ancora una volta la formula di *Rayleigh-Jeans*

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B T \nu^2$$

5 La legge di Plank

La soluzione del problema dello spettro del corpo nero fu data da Plank nel 1900 con l'introduzione dell'ipotesi della quantizzazione dell'energia, dando così inizio alla Meccanica quantistica. Egli suppose che lo scambio di energia fra la radiazione e le pareti della cavità non avvenga con continuità, ma per quantità discrete, i famosi quanti di energia. Questo corrisponde a supporre che l'energia di ciascun oscillatore possa assumere solo valori discreti. In particolare Plank ipotizzò che i valori dell'energia di un oscillatore di frequenza ν siano dati dalla formula $E_n = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) dove h è una opportuna costante che prenderà il nome "costante di Plank" e vale $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js.

La probabilità che un oscillatore, in equilibrio termodinamico alla temperatura T , abbia energia pari ad E_n è data dalla distribuzione di Boltzmann

$$P_n = A e^{-\beta E_n} = A e^{-\beta nh\nu} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

dove A è la costante di normalizzazione, per cui deve valere

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = 1$$

Sommando la serie geometrica si ottiene $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$ e la costante vale

$$A = 1 - e^{-\beta h\nu}$$

dunque la probabilità diventa

$$P_n = (1 - e^{-\beta h\nu}) e^{-n\beta h\nu}$$

Ricordando che l'energia media è definita da

$$E_{ave} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} n_i E_i}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} E_i e^{-nh\nu/k_B T}}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-nh\nu/k_B T}} = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z)$$

Dove n_i è la popolazione dello stato dinamico i -esimo e Z è la funzione di partizione

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu} = \frac{e^{\beta h\nu}}{1 - e^{\beta h\nu}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

e non è più lecito ora il passaggio (che avevamo fatto nel calcolo precedente) all'integrazione,

$$\begin{aligned} E_{ave} &= k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} [\ln (1 - e^{-\beta h\nu})^{-1}] = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln (1 - e^{-\beta h\nu}) = \\ &= -k_B T^2 \left(- \frac{h\nu / k_B}{T^2 (e^{h\nu / k_B T} - 1)} \right) = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \end{aligned}$$

$$E_{ave} = \frac{h\nu}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (47)$$

Questa è una formula statistica, nel senso che è il prodotto dell'energia di un oscillatore ($h\nu$) per il numero di occupazione media degli oscillatori relativa a quel particolare valore della temperatura.

$$E_{ave} = n_{ave} h\nu = \frac{1}{e^{h\nu / k_B T} - 1} h\nu$$

Dove n_{ave} è proprio il numero di occupazione medio dovuto alla **statistica di Bose-Einstein**, valida per i bosoni (particelle a spin intero o nullo, come i fotoni).

Dunque, ricordando che la densità spettrale dei modi vale (per unità di volume)

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

e che la densità di energia specifica è $u(\nu, T) = E_{ave} \rho(\nu)$, si ha

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad \text{formula di Plank}$$

(48)

L'intensità specifica invece vale

$$\varepsilon(\nu, T) \equiv I_\nu(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu / k_B T} - 1} \quad (49)$$

Verifichiamo che da questa formula è possibile riottenere le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e dello spostamento di Wien.

$$I = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} E_{ave} \rho(\nu) d\nu = \int_0^{\infty} u_{ave}(\nu, T) d\nu$$

Dunque

$$\begin{aligned} I &= \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu = \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\pi^4}{15 \left(\frac{h}{k_B T} \right)^4} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \frac{2\pi^5 \cdot (1.38 \cdot 10^{-23})^4}{15 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot (6.63 \cdot 10^{-34})^3} T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} T^4 = \sigma T^4 \end{aligned}$$

Per la verifica della legge dello spostamento di Wien occorre prima ricavare dalla (48) la corrispondente relazione in funzione della lunghezza d'onda. Per far ciò imponiamo l'uguaglianza fra la $u(\nu)$ e $u(\lambda)$ nell'intervallo corrispondente, imponiamo cioè che sia $u(\nu) d\nu = -u(\lambda) d\lambda$, dove abbiamo introdotto il segno meno per tener conto del fatto che la frequenza e la lunghezza d'onda sono inversamente proporzionali, perciò ad un aumento dell'uno corrisponde una diminuzione dell'altro. Derivando la relazione $\nu = c/\lambda$ si ha $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$, dunque

$$\begin{aligned} u(\nu) d\nu &= -u(\lambda) d\lambda \\ u(\lambda) &= -u(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = -u(\nu) \left(-\frac{c}{\lambda^2} \right) = \frac{c}{\lambda^2} u(\nu) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \end{aligned} \quad (49')$$

Per ottenere λ_{\max} occorre porre uguale a zero la derivata della (49') che riscriviamo ponendo per semplicità $x = hc/\lambda k_B T$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{8\pi k_B^5 T^5}{c^4 h^4} \frac{x^5}{e^x - 1} = A \frac{x^5}{e^x - 1} \\ \frac{du(x)}{dx} &= -\frac{A(e^x(x-5) + 5)x^4}{(e^x - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$A(e^x(x-5) + 5)x^4 = 0 \rightarrow e^x(x-5) + 5 = 0$$

Questa equazione trascendentale si risolve numericamente ottenendo la soluzione banale $x_1 = 0$ che non ha significato fisico e la soluzione

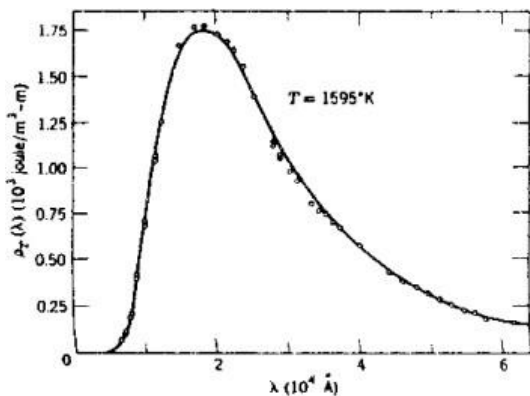
$$x_2 = 4.9651$$

da cui otteniamo

$$x_2 = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{x_2 k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4.9651 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} T} = 2.89 \cdot 10^{-3} \frac{1}{T} (m)$$

Derivando così per via teorica la dello spostamento di Wien.

Nella figura seguente vediamo l'ottimo accordo fra i dati sperimentali (rappresentati dai puntini) e l'andamento teorico dettato dalla legge di Plank (linea continua).



Osserviamo che per le alte frequenze ($h\nu \gg k_B T$) questa formula si riduce alla seguente

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{h\nu/k_B T}$$

Che tende a zero per frequenza infinita, sanando così la “catastrofe ultravioletta”. Alle basse frequenze ($h\nu \ll k_B T$) invece la formula diventa

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Ritrovando la formula classica di Rayleigh-Jeans.

Concludiamo con alcuni esempi numerici circa il valore dell'intensità della radiazione di corpo nero su varie frequenze dello spettro elettromagnetico, pensando ad un corpo nero come il Sole, quindi con temperatura (della fotosfera) di circa 6000 K.

$$I(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\text{Poniamo: } A = \frac{2\pi h}{c^2} = \frac{2\pi \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4.6 \cdot 10^{-50}; \quad B = \frac{h}{k_B T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 6000} = 7.97 \cdot 10^{-15}$$

e tenendo presente che $e^n = 10^x$; $x = \frac{n}{\ln 10} = \frac{n}{2.3}$ abbiamo:

Onde radio

$$\begin{aligned} I(\nu = 1 \text{ kHz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^3)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^3} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{e^{-7.97 \cdot 10^{-12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1 - 3.46 \cdot 10^{-12}} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-41}}{7.97 \cdot 10^{-12}} = 5.8 \cdot 10^{-30} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Microonde

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^9 \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^9)^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^9} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{e^{7.97 \cdot 10^{-6}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{10^{3.5 \cdot 10^{-6}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-23}}{8.1 \cdot 10^{-6}} = 5.7 \cdot 10^{-18} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Infrarosso

$$\begin{aligned} I(\nu = 10^{12} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{12})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{12}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{e^{7.97 \cdot 10^{-3}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{10^{3.5 \cdot 10^{-3}} - 1} = \\ &= \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.0000081 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{1.00000000000797 - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-14}}{8.1 \cdot 10^{-3}} = 5.7 \cdot 10^{-11} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Visibile

$$\begin{aligned} I(\nu = 0.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) &= A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(0.5 \cdot 10^{14})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 0.5 \cdot 10^{14}} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{e^{0.399} - 1} = \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{1.49 - 1} = \\ &= \frac{0.575 \cdot 10^{-8}}{0.49} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \end{aligned}$$

Ultravioletto

$$I(\nu = 10^{15} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{15})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{15}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{e^{7.97} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-5}}{2.89 \cdot 10^3} = 1.6 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2$$

Raggi X, Gamma

$$I(\nu = 10^{20} \text{ Hz}) = A \frac{\nu^3}{e^{B\nu} - 1} = 4.6 \cdot 10^{-50} \frac{(10^{20})^3}{e^{7.97 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{20}} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{10}}{e^{79.7 \cdot 10^5} - 1} = \frac{4.6 \cdot 10^{-2}}{5.5 \cdot 10^{34} - 1} = 10^{-3470000} \approx 0 \text{ W / m}^2$$

Osservazione finale:

lo spettro del corpo nero copre tutte le frequenze, ma occorre essere chiari sul significato della formula che dà la radiazione di corpo nero. Si tratta di una informazione statistica, e ad ogni frequenza è legata a due fattori:

- quale è la probabilità che un dato stato quantistico della radiazione elettromagnetica contenga un certo numero di fotoni;
- quanti stati esistono per una data frequenza;

Se la frequenza di un fotone è grande, e quindi l'energia ($E = h\nu$) è grande rispetto a $k_B T$, la probabilità che un fotone possa essere eccitato termicamente diviene esponenzialmente piccola, ma non nulla. In altre parole, in linea di principio esiste sempre la possibilità che un fotone gamma possa essere generato da una fluttuazione termica, ma di fatto è piccolissima, come abbiamo visto nell'esempio numerico.

Cosa è realmente quantizzato?

Planck non credeva in realtà che la quantizzazione riguardasse effettivamente l'energia degli oscillatori, nè tantomeno che riguardasse la radiazione elettromagnetica; credeva piuttosto che ad essere quantizzati fossero gli scambi di energia tra oscillatori e radiazione. *but Planck now introduced the startling assumption that the vibrators did not emit energy in a continuous stream, but by a series of instantaneous gushes (J. Jeans).* Einstein non era dello stesso avviso, pur credendo nella validità della formula, era convinto che la derivazione della formula di Planck contenesse una mostruosa contraddizione, e tentava perciò di darle una diversa interpretazione pensando in particolare alla quantizzazione come ad una proprietà intrinseca della radiazione elettromagnetica. In un lavoro intitolato *Un punto di vista euristico sulla creazione e conversione della luce* (uscito nello stesso anno, 1905, e sulla stessa rivista in cui comparve la teoria della relatività ristretta), Einstein osserva, svolgendo considerazioni di tipo termodinamico, che la formula di Wien per lo spettro del corpo nero, almeno ad alta frequenza dove peraltro funziona bene, suggerisce appunto che la radiazione stessa sia quantizzata e che si comporti come un gas di particelle di energia $h\nu$; queste sarebbero state poi (1926) battezzate fotoni dal chimico statunitense Gilbert N. Lewis. In effetti, partendo da questo assunto, che equivaleva a trasferire alla radiazione le ipotesi di quantizzazione delle energie suggerite da Planck, Einstein mostrerà poco più tardi (1909) che la formula di Planck può essere ricavata studiando le proprietà della sola radiazione elettromagnetica senza bisogno di introdurre i risonatori delle pareti nè tantomeno di dover calcolare, con l'elettromagnetismo classico, i loro scambi di energia con la radiazione.

Il lavoro del 1905 era focalizzato nel mostrare che, con l'idea dei quanti di radiazione, si potevano spiegare meglio le caratteristiche di diversi fenomeni relativi all'interazione radiazione-materia che l'elettromagnetismo classico non riusciva a spiegare. Il punto di forza del lavoro era la brillante interpretazione dell'effetto fotoelettrico, ovvero della produzione di raggi catodici (elettroni) ottenuti illuminando catodi metallici. L'effetto era noto da diverso tempo ma la sua spiegazione lasciava molti punti oscuri. La spiegazione totalmente rivoluzionaria suggerita da Einstein gli fece vincere, nel 1921, il premio Nobel.

A proposito della trasmissione del calore

(e tempo di raffreddamento di una birretta)

a cura di Giancarlo Buccella

Il **calore** è una forma di **energia**, così come il **lavoro**, che si trasferisce tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura. Questo trasferimento avviene sempre spontaneamente dal corpo più caldo (a temperatura più alta) verso il corpo più freddo (a temperatura più bassa), fino al raggiungimento di un equilibrio termico.

1. Calore

Definizione: È l'energia che viene trasferita tra due corpi o sistemi a causa di una differenza di temperatura.

Modalità di trasferimento: Avviene sempre da un sistema a temperatura più alta ad uno a temperatura più bassa, secondo il secondo principio della termodinamica.

Esempio: Riscaldare una pentola su un fornello. L'energia viene trasferita sotto forma di calore dal fornello (più caldo) alla pentola e successivamente al cibo al suo interno.

Effetto: Il trasferimento di calore aumenta o diminuisce l'energia interna del sistema, modificando spesso la sua temperatura o il suo stato (ad esempio, da solido a liquido).

Dipendenza: Si verifica solo se esiste una differenza di temperatura.

2. Lavoro

Definizione: È l'energia trasferita al sistema dall'esterno o dal sistema all'esterno attraverso forze meccaniche (movimento, compressione, espansione, ecc.).

Modalità di trasferimento: Avviene tramite l'azione di una forza.

Esempio: Sollevare un oggetto contro la forza di gravità, comprimere un gas in un cilindro mediante un pistone.

Effetto: Il lavoro può cambiare l'energia interna del sistema o produrre movimento (energia cinetica).

Dipendenza: Richiede l'applicazione di una forza e uno spostamento.

La **trasmissione del calore** (o **scambio termico**) è un fenomeno di trasporto in cui è coinvolta energia termica tra due sistemi, che è causato da una differenza di temperatura tra i due sistemi, da quello caldo a quello freddo.

Lo studio dei fenomeni di trasmissione del calore riguarda tutti quei processi fisici nei quali una certa quantità di energia termica è trasferita da un sistema ad un altro a causa di una differenza di temperatura. Tali processi avvengono in accordo con i principi della termodinamica: quindi per il primo principio, l'energia termica ceduta da un sistema deve essere uguale a quella ricevuta dall'altro e il calore, come afferma il secondo principio, passa dal corpo più caldo a quello più freddo. Tuttavia tra termodinamica e trasmissione del calore c'è una fondamentale differenza. Infatti in ambito termodinamico è irrilevante il tempo necessario affinché un dato processo sia ultimato, in quanto ora, l'oggetto di studio della termodinamica sono i sistemi in equilibrio e le grandezze fisiche in gioco sono considerate indipendenti dal tempo. Nella trasmissione del calore, chiamata anche Termocinetica, ciò che conta è la rapidità in cui avviene il processo di scambio termico. Riveste quindi notevole importanza la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo che prende il nome di potenza termica. Essa viene indicata con il simbolo \dot{Q} o semplicemente P (dal contesto si capisce che questa potenza si riferisce a scambi termici) e poiché è una potenza, nel sistema internazionale si misura in watt. Riassumendo, lo scopo della Termocinetica è studiare la velocità di scambio del calore invece della quantità assoluta trasferita in un tempo infinito, come avviene in Termodinamica. La trasmissione del calore avviene spontaneamente solo da un corpo caldo ad un corpo freddo, fino a che i due corpi raggiungono la

stessa temperatura, detta di equilibrio termico. Il corpo caldo comunica a quello freddo parte della sua energia termica intensificandone l'agitazione molecolare. La propagazione del calore può avvenire per conduzione, convezione o per irraggiamento

Conduzione

Il trasferimento per conduzione avviene tra corpi che sono a contatto, o tra parti di uno stesso corpo che si trovano a temperature diverse. Esso è causato dal trasferimento di energia cinetica da una molecola a quella adiacente che possiede una velocità di vibrazione minore. Poiché la velocità di vibrazione delle particelle è direttamente proporzionale alla temperatura, il corpo caldo cede energia a quello freddo, aumentandone la temperatura, finché non è raggiunto l'equilibrio termico. Prendiamo ad esempio, come indicato in figura 1a, due corpi a temperature diverse. Una volta posti in contatto, per conduzione il calore fluisce dal corpo più caldo a quello più freddo, finché essi raggiungono una temperatura d'equilibrio

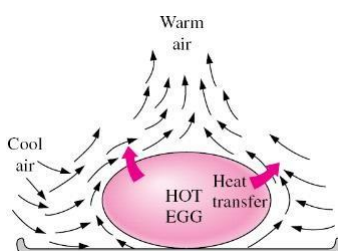


Convezione

La convezione è uno scambio termico tra un solido ed un fluido in movimento che ne lambisce la superficie. La convezione ha luogo quando uno dei due corpi interessati dallo scambio termico è un fluido.

Quando una porzione di fluido si riscalda (ad esempio, vicino a una superficie calda), si espande, riducendo la sua densità. La porzione più calda e meno densa del fluido tende a salire. La porzione più fredda, più densa, scende verso il basso per occupare lo spazio lasciato libero. Questo movimento crea un moto circolatorio nel fluido, chiamato moto convettivo. Tale processo continua finché esiste una differenza di temperatura. In questi casi le forze gravitazionali provocano quindi continui movimenti delle particelle del fluido, con conseguente miscelazione, favorendo pertanto la trasmissione del calore dalle particelle più calde a quelle più fredde. Questo fenomeno prende il nome di convezione naturale.

Quando invece i movimenti delle particelle del fluido sono imposti essenzialmente da cause meccaniche (una pompa, nel caso di circolazione dell'acqua, o semplicemente l'azione del vento), il fenomeno prende il nome di convezione forzata.

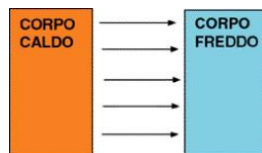


Irraggiamento

Nell'irraggiamento il calore viene scambiato mediante emissione e assorbimento di radiazione elettromagnetica (principalmente in ambito terrestre sotto forma di raggi infrarossi).

- Emissione di radiazione: tutti i corpi con una temperatura superiore allo zero assoluto emettono energia sotto forma di onde elettromagnetiche. La quantità di radiazione emessa dipende dalla temperatura del corpo e dalla sua emissività (quanto bene un corpo emette radiazione, il corpo che emette più di tutti viene detto corpo nero ed ha una emissività pari ad uno, ossia emette tutta la radiazione che riceve).
- Trasferimento dell'energia: l'energia termica si propaga nello spazio sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Queste onde non richiedono un mezzo fisico per propagarsi, quindi l'irraggiamento avviene anche attraverso il vuoto.
- Assorbimento: quando le onde elettromagnetiche incontrano un altro corpo, una parte dell'energia viene assorbita, trasformandosi in calore. La quantità assorbita dipende dalle proprietà del materiale (colore, struttura, emissività) e dall'intensità della radiazione.

Il calore così scambiato aumenta molto rapidamente con la differenza di temperatura. A differenza delle altre due modalità di scambio termico, l'irraggiamento non richiede la presenza di un mezzo perché vi sia trasmissione di energia. La radiazione elettromagnetica che opera da "trasmettitore" di calore, è generata dall'eccitazione termica della superficie del corpo, a sua volta causata dallo stato energetico degli atomi che la costituiscono, ed è emessa in tutte le direzioni.



Resistenza termica

Le considerazioni sulle analogie tra i fenomeni di scambio di calore ed i circuiti elettrici, e in particolare l'esatta corrispondenza tra potenza termica e corrente elettrica, sono del tutto confermate dalla formulazione di una legge fisica chiamata equivalente termico della Legge di Ohm. Essa afferma che la quantità di calore scambiata nell'unità di tempo, ossia la potenza termica, è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura che causa lo scambio di calore ed è inversamente proporzionale ad una grandezza che, per analogia con i fenomeni elettrici, viene detta *resistenza termica*.

$$I = \frac{\Delta V}{R_{\text{elettrica}}} \rightarrow P = \frac{\Delta T}{R_{\text{termica}}}$$

Dove ΔT è la differenza di temperatura (positiva) in Kelvin ed R rappresenta la resistenza termica del materiale.

La **resistenza termica** è una grandezza fisica che misura la capacità di un materiale o di un sistema di opporsi al trasferimento di calore. In altre parole, rappresenta l'efficienza con cui un materiale o una struttura limita il flusso di energia termica attraverso di esso.

$$R = \frac{\Delta T}{P}$$

L'analogia che collega tra loro lo studio dei fenomeni termici e di quelli elettrici trae origine dalla similitudine esistente tra le equazioni che li governano: si ha infatti che formalmente alla legge di Fourier corrisponde la legge di Ohm e all'equazione di Fourier l'equazione della distribuzione del potenziale elettrico. La formale eguaglianza tra le equazioni consente di utilizzare alcuni risultati analitici propri della teoria dell'elettricità anche per lo studio della trasmissione del calore. Un tipico esempio si ha nel concetto di resistenza termica che fa sì che, analogamente a quelle elettriche, le resistenze termiche in serie si sommino.

L'esistenza di una tale analogia consente quindi di realizzare modelli elettrici per mezzo dei quali è possibile prevedere il comportamento termico di strutture complesse, che difficilmente potrebbero essere studiate analiticamente.

Nel caso di più strati la R sarà quella totale R_{TOT} andando a distinguere il caso di strati posti in serie da quelli posti in parallelo, Avendosi

Strati in serie $R_{TOT} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

Strati in parallelo $\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Se il sistema è di tipo misto la resistenza totale è $R_{TOT} = R_{\text{serie}} + R_{\text{parallelo}}$.

Approfondiamo ora la teoria circa le tre modalità di trasmissione del calore.

Conduzione

La conduzione termica è un fenomeno caratteristico dei solidi, benché avvenga anche nei fluidi. L'esperienza mostra che la capacità di trasmissione del calore è una caratteristica intrinseca ai vari corpi e tale capacità descritta attraverso un parametro detto conducibilità termica (o conduttività termica) e viene indicata con la lettera k (o λ) e si misura in W/mK. Ad esempio l'alluminio che è un buon conduttore, ha un valore di $k = 217$ W/mK mentre il legno, che è un cattivo conduttore ha un valore circa mille volte inferiore $k = 0.10$ W/mK.

Ecco una tabella del valore di k per alcuni materiali.

Sostanza	k (W/mK)
Acciaio inox	17
Acciaio laminato	52
Acqua distillata	0.6
Alluminio laminato	290
Argento	460
Aria secca	0.026
Carta	0.15
Diamante	1600
Ghiaccio	2.2÷2.5
Lana di pecora	0.04
Mattoni (pieni, forati)	0.25÷0.90
Legno	0.15÷0.27
Neve (appena caduta)	0.06
Neve (compatta)	0.70
Oro	320
Plexiglass	0.19
Rame	390
Vetro cellulare (tipo particolare di vetro)	0.04
Vetro laminato	1

Equazione della conduzione del calore in forma generale:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c_p}$$

α è la diffusività termica $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, ρ è la densità del materiale attraverso cui avviene la conduzione, k è il coefficiente di conducibilità termica e c_p è il calore specifico a pressione costante, mentre q è la generazione di calore (interna al sistema) volumetrica. Nel prosieguo discuteremo solo il caso in cui $q = 0$.

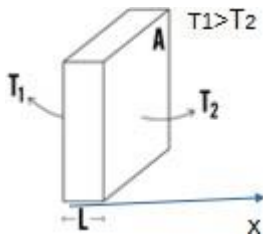
Riferendoci al caso di stazionarietà (quando il campo termico è indipendente dal tempo si dice che la conduzione avviene in *regime stazionario*, mentre se la temperatura è funzione anche del tempo il regime si dice *transitorio*), ed al caso in cui non vi sia generazione di calore interna, l'equazione diventa (equazione di Laplace):

$$\nabla^2 T = 0$$

La **legge fenomenologica di Fourier** permette di calcolare la quantità di calore trasmessa per conduzione all'interno del corpo stesso o fra due o più corpi a contatto fra loro.

Nel caso semplice di conduzione lineare e stazionaria e sezione del solido costante S , il calore trasferito (dQ), nell'unità di tempo (dt), cioè la potenza termica trasmessa, è dato dal prodotto della conducibilità k per la sezione trasversale alla direzione di propagazione S , per la variazione di temperatura (dT) della direzione di propagazione nel solido.

$$\frac{dQ}{dt} \equiv P = -k S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{W}) \quad (1)$$



Questa legge poneva per la prima volta, introducendo (come l'esperienza mostrava) la presenza del segno negativo al secondo membro, la presenza di una freccia del tempo nella trasmissione del calore (da temperatura maggiore verso temperatura minore e mai viceversa, spontaneamente!).

Successivamente molte leggi furono formulate sulla stessa falsariga del postulato di Fourier, ad esempio la Legge di Fick per la diffusione, la legge di Ampère per la corrente elettrica, la legge di Bernoulli per il moto dei fluidi reali. Tutte queste leggi avevano in comune il legame funzionale fra un flusso (di calore, di massa, di corrente, ...) con una causa prima e cioè una differenza di potenziale (ΔT , ΔV , ΔC , Δp , ...).

Per variazioni finite la legge diventa:

Integrando la (1) su x , in riferimento alla figura di cui sopra, si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} P dx = - \int_{T_1}^{T_2} k S dT : \quad P(x_2 - x_1) = -kS(T_2 - T_1) = kS(T_1 - T_2)$$

se indichiamo lo spessore della lastra $x_2 - x_1 = L$ si ha la seguente legge di trasmissione del calore in regime stazionario

$$P = k S \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (T_1 > T_2) \quad (2)$$

E' utile anche introdurre il flusso per unità di superficie che viene chiamato densità di flusso o intensità di flusso, o semplicemente intensità. Nel caso specifico del trasferimento di calore, viene definito come densità di flusso termico ed è rappresentato con il simbolo q , mentre per le onde si usa parlare di intensità, con simbolo I , esso rappresenta quanta energia nell'unità di tempo attraversa una superficie unitaria posta perpendicolarmente alla direzione di \mathbf{q} (q è in fatti un vettore, come si vede dalla (4)).

Dalla (1) si ha che la densità di flusso termico in forma differenziale è

$$q = \frac{P}{S} = -k \frac{dT}{dx} \quad (3)$$

Nel caso in cui la temperatura dipenda dalle tre coordinate spaziali la legge di Fourier è la seguente:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (4)$$

Facciamo vedere come la (4) sia effettivamente una soluzione dell'equazione di Laplace scritta sopra. Infatti in condizioni di stazionarietà la divergenza di \mathbf{P} deve essere nulla al fine di soddisfare la conservazione dell'energia (non vi deve essere, in altre parole, nessun accumulo di energia nel corpo considerato)

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

Sostituendo in questa equazione la (4) si ha

$$\nabla \cdot (-k \nabla T) = 0$$

Se k è costante, come avviene per materiali omogenei l'equazione si semplifica nel seguente modo

$$-k \nabla^2 T = 0$$

dividendo per $-k$ (assumendo k diverso da zero) si arriva all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

Mostrando così come effettivamente la (4) sia una soluzione dell'equazione di Laplace.

Dalla (2) possiamo ricavare l'espressione per la densità di flusso:

$$q = \frac{k}{L} (T_1 - T_2) \quad (T_1 > T_2) \quad (5)$$

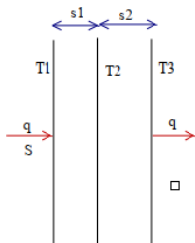
Ricordando la definizione data sopra di resistenza termica, la (4) si può scrivere nel seguente modo

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{R}$$

Si definisce allora la resistenza termica per conduzione con la seguente relazione

$$R_{cond} = \frac{L}{kS} \quad K / W \quad (6)$$

Nel caso di due strati a contatto, di spessore s_1 ed s_2 , come in figura,



la (5) diventa

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2}} = \frac{(T_1 - T_3)}{R_1 + R_2}$$

Nel caso di più strati la relazione diventa

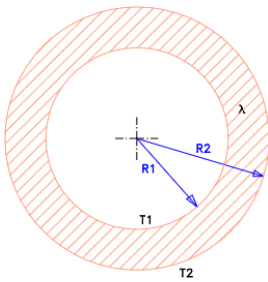
$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

Nel caso di una conduzione con geometria cilindrica, applicando la (4), in coordinate cilindriche, si ha

$$P = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi k L} \log \frac{R}{r}} \quad (T_1 > T_2) \quad (6)$$

Dove L è l'altezza del cilindro, r il raggio interno ed R quello esterno e k la conducibilità del materiale di cui è fatto il cilindro.

Nel caso di una conduzione con geometria sferica (cava) legge di Fourier calcolata in coordinate sferiche porta alla seguente espressione della potenza termica

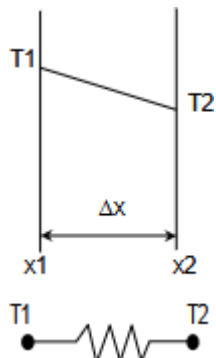


$$P = \frac{4\pi k (T_1 - T_2)}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \quad (T_1 > T_2) \quad (7)$$

Alcuni esempi

1. Determinare il calore trasferito per conduzione (stazionario) attraverso una parete di 10 m^2 di mattoni o acciaio, cello spessore di 30 cm sottoposta da una differenza di temperatura di 20°C . (Conducibilità mattoni $k = 0.465 \text{ W/m}^2\text{K}$, acciaio $k = 45 \text{ W/mK}$).

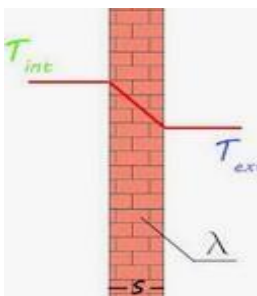
Si può pensare all'analogia elettrica, in cui la resistenza termica vale $R = L/kS$ schematicamente:



$$R = \frac{L}{kS} = \frac{0.3}{0.465 \cdot 10} = 0.0645 \text{ K / W}$$

$$P_{\text{mattoni}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20}{0.0645} = 310 \text{ W}$$

Si poteva anche applicare direttamente la (2)



$$\text{Mattoni} \quad P = 0.465 \cdot 10 \frac{20}{0.3} = 310 \text{ W}$$

$$\text{Acciaio} \quad P = 45 \cdot 10 \frac{20}{0.3} = 30 \text{ kW}$$

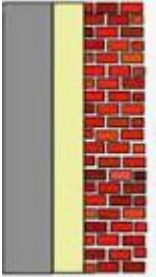
2. La parete di un forno è composta dai seguenti strati

Strato 1: $k_1 = 1.39$ e $s_1 = 30$ cm

Strato 2: $k_2 = 0.21$ e $s_2 = 10$ cm

Strato 3: $k_3 = 0.70$ e $s_3 = 20$ cm

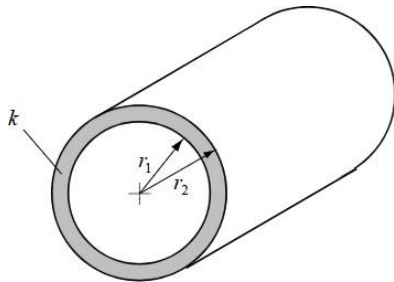
Determinare il calore disperso per unità di area verso l'esterno, con una differenza di temperatura di 400°C .



Usando la relazione vista sopra si ha

$$q = \frac{(T_1 - T_3)}{\frac{s_1}{k_1} + \frac{s_2}{k_2} + \frac{s_3}{k_3}} = \frac{400}{\frac{0.3}{1.39} + \frac{0.1}{0.21} + \frac{0.2}{0.70}} = 409 \text{ W / m}^2$$

3. Un cilindro di rame ha raggio interno di 1 cm ed esterno di 1.8 cm, la superficie interna e quella esterna sono mantenute rispettivamente a 305 K (32°C) e 295 K (22°C) e la conducibilità termica k varia linearmente con la temperatura secondo la legge $k = k_0 (1 + b T_m)$ dove $k_0 = 371.9 \text{ W/mK}$ e $b = -9.25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Valutare le perdite di calore per unità di lunghezza. T_m è la temperatura media.



Dalla (7)

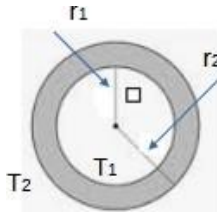
$$\frac{P}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\log \frac{R_1}{R_2}} \quad (T_1 > T_2)$$

Con $k_m = k_0 (1 + b T_m)$ essendo $T_m = (T_1 + T_2)/2 = 300 \text{ K}$ si ha

$$k_m = 371.9 (1 - 9.25 \cdot 10^{-5} \cdot 300) = 361.6 \text{ W / mK} \quad \text{quindi}$$

$$\frac{P}{L} = 2\pi \cdot 361.6 \frac{305 - 295}{\log \frac{0.018}{0.010}} = 38.65 \text{ W / m}$$

4. Una sfera cava è composta da un materiale con conducibilità termica k . Il raggio interno della sfera è $r_1 = 0.05 \text{ m}$ e il raggio esterno è $r_2 = 0.10 \text{ m}$. La superficie interna della sfera cava è mantenuta a una temperatura costante $T_1 = 400 \text{ K}$ mentre la superficie esterna è mantenuta a $T_2 = 300 \text{ K}$, sia $k = 15 \text{ Wm}^2\text{K}$. Determinare la distribuzione della temperatura $T(r)$ all'interno dello strato sferico in regime stazionario e calcolare il flusso termico totale (potenza) attraverso la sfera cava.



Occorre utilizzare l'equazione di Laplace in coordinate sferiche, tenendo conto che nella divergenza sopravvive solo il termine radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \text{ moltiplicando per } r^2$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \rightarrow \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = C_1; \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \text{ integrando}$$

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Con C_1 e C_2 costanti di integrazione.

Dalle condizioni al contorno ricaviamo le due costanti

Sulla superficie esterna $r = r_2$ la temperatura vale $T(r_2) = T_2$, mentre su quella interna $T(r_1) = T_1$;

$$T(r_2) \equiv T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2$$

$$T(r_1) \equiv T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2$$

$$T_1 - T_2 = -\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_1}{r_2} \text{ da cui}$$

$$C_1 = (T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \text{ che sostituito nell'espressione di } T_1 \text{ ci dà}$$

$$C_2 = T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_2}{r_2 - r_1}$$

Allora la funzione che stabilisce l'andamento della temperatura all'interno della sfera cava in funzione del raggio è

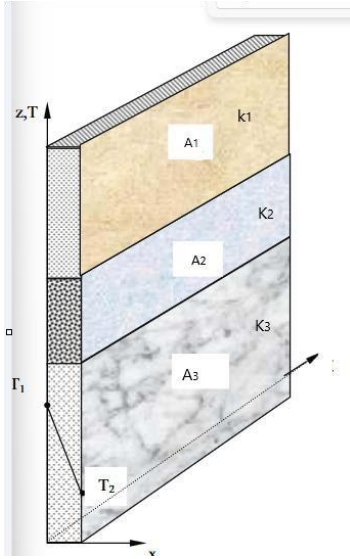
$$T(r) = -\frac{1}{r} \left[(T_2 - T_1) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right] + \left[T_1 + \frac{(T_2 - T_1) r_2}{r_2 - r_1} \right] \text{ sostituendo i valori numerici si ha}$$

$$T(r) = \frac{10}{r} + 200 \text{ K}$$

Per il flusso termico usando la (7) si ha

$$P = \frac{4\pi \cdot 15 \cdot 100}{\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.10}} = 1884 \text{ W}$$

5. Una parete a strato singolo può essere costituita da materiali che, pur essendo omogenei ed isotropi, presentano differenti valori della conduttività termica, k_1 , k_2 , e k_3 , come in figura. Si calcoli la potenza trasmessa, essendo la temperatura esterna T_1 e quella interna T_2 .



Il flusso di calore è presente solo lungo la direzione x e sarà la somma dei tre flussi termici che attraversano la parete:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = k_1 A_1 \frac{\Delta T}{s} + k_2 A_2 \frac{\Delta T}{s} + k_3 A_3 \frac{\Delta T}{s}$$

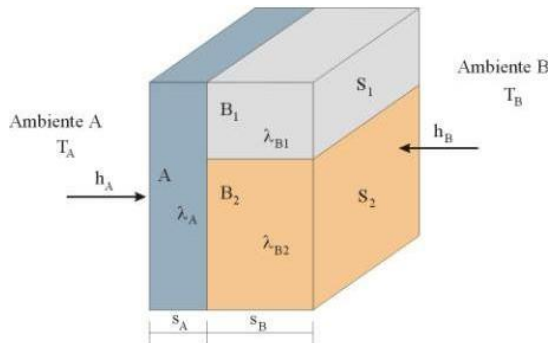
$$R_1 = \frac{s}{k_1 A_1}; R_2 = \frac{s}{k_2 A_2}; R_3 = \frac{s}{k_3 A_3}$$

La potenza termica trasmessa è allora

$$P = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \frac{\Delta T}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \Delta T = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

$$\frac{1}{R_{TOT}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

6. Si consideri una parete costituita da un primo strato omogeneo A (acciaio) e da un secondo strato non omogeneo formato dall'alternarsi di due materiali (cemento B₁ e argilla espansa B₂) aventi conducibilità termica differente. Si calcoli la potenza di conduzione termica trasmessa.



Trattiamo il problema in termini di resistenze perché più agevole.

$$P = \frac{\Delta T}{R_{TOT}}$$

$$\text{Resistenza dovuta allo strato A: } R_A = \frac{s_A}{k_1 S}$$

Dove s_A è lo spessore dello strato A k₁ la sua conducibilità ed S la superficie della parete (S = S₁ + S₂).

$$\text{Resistenza cumulata di B}_1 \text{ e B}_2 \text{ posti in parallelo: } \frac{1}{R_{2+3}} = \frac{1}{R_{B_1}} + \frac{1}{R_{B_2}} \text{ cioè } R_{2+3} = \frac{R_{B_1} R_{B_2}}{R_{B_1} + R_{B_2}}$$

Tenendo conto che

$$R_{B_1} = \frac{s_B}{k_{B_1} S_1}; \quad R_{B_2} = \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}$$

$$R_{2+3} = \frac{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}} = \frac{\frac{s_B^2}{k_{B_1} S_1 k_{B_2} S_2}}{\frac{s_B}{k_{B_1} S_1} + \frac{s_B}{k_{B_2} S_2}} = \frac{s_B}{\frac{k_{B_1} S_1}{k_{B_2} S_2} + k_{B_1} S_1} = \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}$$

$$\text{La resistenza totale è } R_{TOT} = R_A + R_{2+3} = \frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}$$

$$\text{LA potenza trasmessa è } P = \frac{\Delta T}{\frac{s_A}{k_1 S} + \frac{s_B}{k_{B_2} \frac{S_1}{S_2} + k_{B_1} S_1}}$$

Convezione

La trasmissione di calore per convezione viene descritto dalla **legge del raffreddamento di Newton**.

La convezione termica è un insieme di fenomeni di trasporto di massa ed energia per mezzo di un fluido riscaldato (o raffreddato) dovuta ad una sommatoria di effetti che portano i fluidi a spostarsi da una zona calda ad una fredda.

La *convezione termica* è un fenomeno complesso dato da un insieme di più fenomeni apparentemente semplici: essa è il risultato del movimento di fluidi (*attivato o non da dispositivi esterni*) che trasportano (dal latino *conveho* trasporto) nel loro movimento energia termica (si pensi ad esempio ai moti convettivi dell'acqua che si riscalda in una pentola o dell'aria calda emessa da un convettore all'interno di una stanza). Si ipotizza che vi sia a contatto della superficie del contenitore e lo strato laminare di aria dove il calore si trasmette per convezione, la cui profondità è nell'ordine dei millimetri. La quantità di calore per unità di tempo che viene scambiata per convezione è descritta dalla legge empirica (detta legge di raffreddamento di Newton) Newton ebbe il grande merito di semplificare la grande complessità del problema scrivendo per la convezione termica la seguente legge:

$$P = h S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (8)$$

Dove h è la costante di convezione, P il flusso termico scambiato con l'ambiente (fluido, a temperatura T_{fluido}) e che **funge praticamente da termostato**, ed S è la superficie del corpo considerato attraverso la quale avviene lo scambio termico.

In termini di densità di flusso si ha

$$q = h (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (9)$$

Ricordando la definizione di resistenza termica si ha

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS} \text{ K / W} \quad (10)$$

Newton ha semplificato la definizione analitica di un fenomeno complesso con una semplice introduzione di un *coefficiente di convezione* noto il quale si può conoscere il flusso termico effettivamente scambiato, però a causa della complessità nella determinazione del valore numerico di h esso si può anche definire come un **coefficiente di ignoranza**.

Infatti il coefficiente h non è una proprietà termofisica ma dipende da un grande numero di fattori fra i quali ricordiamo:

- le proprietà fisiche del fluido: densità ρ , viscosità dinamica μ , calore specifico a pressione costante c_p , coefficiente di conducibilità termica k ;
- la differenza di temperatura fra i corpi;
- la velocità del fluido e se vi è convezione naturale o forzata;
- la geometria della parete attraverso cui avviene lo scambio termico.

Quindi non è possibile conoscere il coefficiente di convezione dati i soli parametri fisici del fluido e le temperature di scambio: occorre specificare anche la geometria di scambio ed altri fattori, come elencato sopra, e ciò rende di fatto lo studio della convezione termica molto complesso.

Ecco alcuni valori di h che fungono da cornice al quadro di valori che il coefficiente può assumere.

<i>Convezione naturale</i>	<i>h (W/m²K)</i>
Gas	2 - 25
Liquidi	50 - 1000
<i>Convezione forzata</i>	
Gas	25 – 250
Liquidi	100 - 20000

E' utile introdurre una grandezza adimensionale R_a caratteristica del sistema in oggetto – detta numero di Rayleigh – definito come $R_a = A(T)L^3\Delta T$

Dove ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo solido ed il fluido, L è una dimensione caratteristica del sistema e $A(T)$ è una funzione dipendente dalle proprietà fisiche del fluido ed in particolare dalla sua temperatura media.

Ecco alcuni valori di $A(T)$ per l'aria

T (°C)	A(T)
0	1.5
20	1.0
50	0.6
100	0.4

Risulta allora che il coefficiente di convezione h è proporzionale a una potenza del numero di Rayleigh (R_a^n). Valori tipici di n sono nell'intervallo 1/4 (per flussi laminari) a 1/3 (per flussi turbolenti) in convezione naturale.

$$h = \frac{kC}{L} R_a^n$$

dove C ed n sono costanti empiriche che dipendono dalla geometria e dalle condizioni del flusso.

Risulta altresì che è possibile correlare h a R_a attraverso una relazione empirica che coinvolge il numero di Nusselt Nu :

$$Nu = C (R_a)^n$$

dove C è una costante empirica che dipende dalla geometria e dalle condizioni di flusso, in definitiva è possibile esprimere h nel seguente modo:

$$h = \frac{k}{L_c} Nu \quad (11)$$

dove L_c è (per un cilindro) il suo diametro, e k è la conducibilità del fluido.

Empiricamente Nu è legato al valore del numero di Rayleigh, in regime di convezione naturale, nel seguente modo

$$Nu = 0.59 R_a^{0.25}$$

esso risulta avere (come da letteratura), per la condizione vetro-aria, un valore compreso fra 2 e 10.

La (8) diventa quindi

$$P = h S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) = \frac{k Nu}{L_c} S (T_{\text{solido}} - T_{\text{fluido}}) \quad (12)$$

Si tenga sempre presente che stiamo supponendo la differenza di temperatura costante (caso stazionario).

Se invece la temperatura del solido si raffredda, occorre usare il seguente approccio.

Dalla teoria è noto che il calore che un corpo cede o assorbe dall'ambiente si può scrivere in forma elementare come

$$dQ = mc dT$$

Per i liquidi e i solidi, si usa sempre il calore specifico a pressione costante (c_p) perché i cambiamenti di volume sono minimi e la pressione è tipicamente costante. Quindi si ha

$$dQ = mc_p dT \quad (13)$$

questo calore è esattamente quello che nel nostro modello fluisce essenzialmente per convezione, dunque sostituendo nella (8) si ha

$$\frac{mc_p dT}{dt} = -hS(T_{\text{solido}} - T_{\text{amb}})$$

Ma mentre T_{amb} come già osservato è praticamente la temperatura del termostato rappresentato dall'ambiente interno del frigo, quindi avente una $T = \text{cost}$ ed esattamente nel nostro caso: $T_{\text{amb}} = 5^\circ\text{C}$, T_{solido} è la temperatura del nostro sistema (bottiglia + birra) che va raffreddandosi, quindi è funzione del tempo $T(t)$, allora si ha

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{mc_p} (T(t) - T_{\text{amb}}) = -K (T(t) - T_{\text{amb}}) \quad (14)$$

Dove si è posto $K = \frac{hS}{mc_p} \quad (15)$

Questa è la legge di raffreddamento di Newton, che può essere applicata in determinati contesti che soddisfano specifiche condizioni. La legge afferma che il tasso di variazione della temperatura di un corpo è proporzionale alla differenza tra la sua temperatura e quella dell'ambiente circostante:

dove:

- T è la temperatura del corpo,
- T_{amb} è la temperatura dell'ambiente circostante (assunta costante),
- h è la costante di scambio convettivo (detta anche coefficiente di conducibilità esterna o di trasporto) che dipende dalle proprietà del materiale e dall'ambiente
- K è la costante di raffreddamento che dipende dalla capacità termica del sistema (mc) dalla superficie di scambio S e dal coefficiente di conducibilità h . Il segno meno indica che la temperatura del corpo diminuisce con il trascorrere del tempo.

Integriamo allora la (13) al fine di avere una legge che descriva l'andamento temporale della temperatura.

$$\int \frac{1}{T(t) - T_{\text{amb}}} dT = -K \int dt$$

$$\log |T(t) - T_{\text{amb}}| = -K t + C$$

Dove C è la costante di integrazione.

$$|T - T_{\text{amb}}| = e^{-Kt+C} = e^{-Kt} e^C$$

Possiamo togliere il simbolo del valore assoluto in quanto stiamo considerando una differenza di temperatura positiva, e per semplificare poniamo $e^C = C$.

$$T(t) - T_{\text{amb}} = C e^{-Kt}$$

Supponendo che al tempo $t = 0$ il corpo abbia temperatura $T_0 > T_{\text{amb}}$, determiniamo C :

$$T_0 - T_{\text{amb}} = C e^0 = C$$

Quindi la soluzione cercata è

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb}) e^{-Kt} \quad T_0 > T_{amb} \equiv T_{fluido} \quad (16)$$

Rimane il problema di determinare il valore della costante di raffreddamento K, innanzitutto si introduce il suo inverso che rappresenta dunque una costante di tempo $1/K = \tau$ (che potremmo chiamare costante di decadimento termico)

$$T(t) = T_{amb} + \Delta T e^{-t/\tau} \quad (17)$$

Essendo, dalla (14): $K = \frac{hS}{mc}$ si ha

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{mc_p}{hS} \quad (18)$$

E' questa relazione che va usata per calcolare il tempo di raffreddamento di un corpo per convezione nel caso non stazionario.

Condizioni per l'applicazione della legge:

1. Differenza di temperatura moderata:

La legge è valida quando la differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante non è eccessiva. Per differenze di temperatura molto grandi, potrebbero entrare in gioco fenomeni come la convezione forzata o l'irraggiamento, rendendo la legge meno accurata.

2. Convezione naturale:

Il corpo perde calore principalmente per convezione naturale (cioè per il movimento naturale del fluido circostante, come aria o acqua) e non per irraggiamento o conduzione predominante.

3. Temperatura dell'ambiente costante:

La temperatura dell'ambiente circostante deve rimanere costante nel tempo, o comunque variare lentamente rispetto al processo di raffreddamento.

4. Trasferimento di calore omogeneo:

Il trasferimento di calore all'interno del corpo (conduzione interna) deve essere abbastanza rapido da garantire che la temperatura del corpo sia uniforme. In altre parole, il corpo deve essere considerato termicamente omogeneo.

5. Fluido circostante in quiete:

Il fluido intorno al corpo (ad esempio l'aria o l'acqua) deve essere in quiete o muoversi lentamente, in modo che il raffreddamento avvenga principalmente per convezione naturale e non forzata.

6. Trascurabilità di altri meccanismi di trasferimento di calore:

L'irraggiamento (trasferimento di calore per onde elettromagnetiche) e la conduzione attraverso un altro mezzo devono essere trascurabili rispetto alla convezione.

Esempi pratici di applicazione:

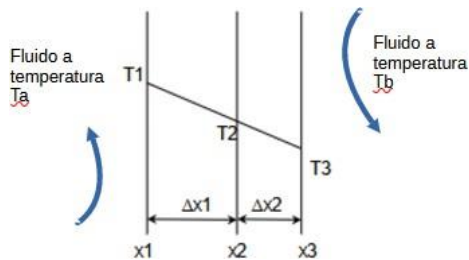
Raffreddamento di una tazza di caffè in una stanza.

Raffreddamento di un oggetto metallico esposto all'aria ambiente.

Calcolo della perdita di calore da una bottiglia di acqua calda immersa in un bagno di acqua fredda.

Alcuni esempi

1. Si abbia uno strato come in figura in cui vi è sia conduzione che convezione stazionario, si trovi l'espressione del flusso termico.



Essendo in condizione di flusso stazionario si ha che i vari flussi fra le diverse zone sono tutti uguali fra loro, cioè si ha

Flusso di scambio convettivo fra il fluido 1 e la parete 1 = Flusso di scambio di conduzione nello strato Δ_1 = Flusso di scambio di conduzione nello strato Δ_2 = Flusso di scambio convettivo fra la parete 2 ed il fluido 2.

$$h_1 S (T_a - T_1) = k_1 S \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} = k_2 S \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_2} = h_2 S (T_3 - T_b)$$

Con qualche semplice passaggio algebrico si arriva alla seguente espressione

$$q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{\Delta x_2}{k_2 S} + \frac{1}{h_2 S}} = \frac{T_a - T_b}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{T_a - T_b}{R_{TOT}}$$

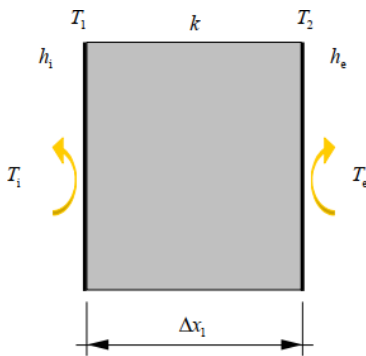
2. Il coefficiente di trasmissione del calore per convezione forzata per un fluido caldo che scorre alla temperatura di 394 K su una superficie fredda vale 227 W/m²K. Sapendo che la temperatura della superficie è 283 K, determinare il flusso termico unitario trasmesso dal fluido alla superficie.



$$P = h(T_f - T_p) = 227(394 - 283) = 25.2 \text{ kW} / \text{m}^2$$

3. Un muro di calcestruzzo spesso 15 cm, con conduttività termica $k = 0.87 \text{ W/mK}$, è esposto dal lato interno ad aria a 25°C e dall'altro ad aria a 0°C . Il coefficiente di scambio termico convettivo per l'aria interna vale $10.46 \text{ W/m}^2\text{K}$ mentre per quella esterna vale $52.3 \text{ W/m}^2\text{K}$. Determinare la densità di flusso termico e la temperatura sulle due facce del muro.

4.



$$q = \frac{P}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{1}{S} \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{Sh_i} + \frac{\Delta x}{Sk} + \frac{1}{Sh_e}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_e}} = \frac{25 - 0}{\frac{1}{52.3} + \frac{0.15}{0.87} + \frac{1}{10.46}} = 87.1 \text{ W/m}^2$$

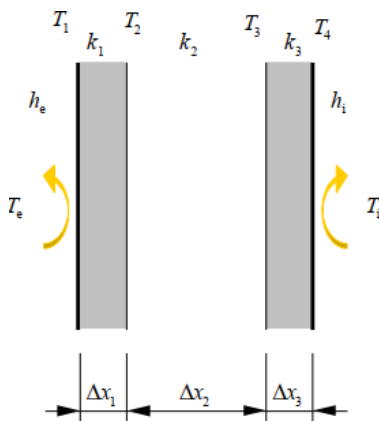
Noto il valore di q è immediato calcolare il valore della temperatura su ognuna delle due facce in quanto lo scambio termico essendo stazionario avrà lo stesso valore nei due transiti, cioè:

$$q = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{h_i}} \rightarrow T_1 = T_i - \frac{q}{h_i} = 25 - \frac{87.1}{10.46} = 16.7^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{T_2 - T_e}{\frac{1}{h_e}} \rightarrow T_2 = T_e + \frac{q}{h_e} = 0 + \frac{87.1}{52.3} = 1.7^\circ\text{C}$$

4. Sia dato un muro piano costituito da uno strato di pietra ed uno di calcestruzzo, di spessore uguale e pari a 10 cm, separati da un'intercapedine d'aria di 30 cm. Il muro separa due ambienti a temperatura rispettiva di 40°C e 20°C, aventi coefficiente di scambio convettivo pari rispettivamente a 30 e 5 W/m²K. Sapendo che i coefficienti di conducibilità della pietra, del calcestruzzo e dell'aria valgono rispettivamente 1.5 W/mK, 1.2 W/mK e 0.022 W/mK, determinare la densità di flusso scambiato e l'andamento della temperatura nei casi in cui:

- l'aria non dia luogo a moti convettivi
- l'aria dia luogo ad uno scambio per convezione con coefficiente h pari a 2.5 W/m²K



- Calcoliamo la resistenza totale del sistema per unità di superficie.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_e} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} + \frac{1}{h_i} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{0.3}{0.022} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5} \right) = 14.29 \text{ K/W m}^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40 - 20}{14.29} = 1.4 \text{ W/m}^2$$

Per determinare T₁ e T₄ si sfrutta la convezione per l'aria esterna ed interna.

$$q = h_e (T_e - T_1) \rightarrow T_1 = T_e - \frac{q}{h_e} = 40 - \frac{1.4}{30} = 39.95^\circ\text{C}$$

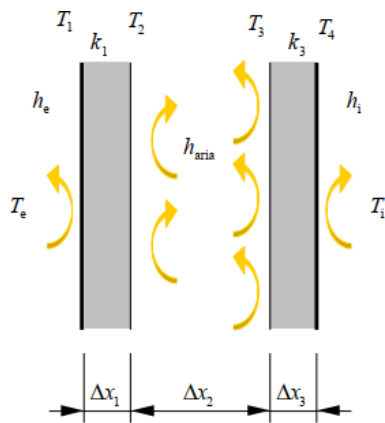
$$q = h_i (T_4 - T_i) \rightarrow T_4 = \frac{q}{h_i} + T_i = \frac{1.4}{5} + 20 = 20.28^\circ\text{C}$$

Per determinare T₂ e T₃ si sfrutta la conduzione attraverso gli strati 1 e 3.

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q \frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.95 - 1.4 \frac{0.1}{1.5} = 39.86^\circ\text{C}$$

$$q = k_2 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_2} \rightarrow T_3 = T_4 + q \frac{\Delta x_2}{k_2} = 20.28 + 1.4 \frac{0.3}{0.022} = 20.4^\circ\text{C}$$

b) La situazione è ora illustrata dalla seguente figura.



Procediamo come nel caso precedente.

$$R_{TOT} = \frac{1}{h_e S} + \frac{\Delta x_1}{k_1 S} + \frac{1}{h_{aria} S} + \frac{\Delta x_3}{k_3 S} + \frac{1}{h_i S} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{30} + \frac{0.1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{0.1}{1.2} + \frac{1}{5} \right) = 0.794 \text{ K/W m}^2$$

$$q = \frac{T_e - T_i}{R_{TOT}} = \frac{40 - 20}{0.794} = 25.2 \text{ W/m}^2$$

$$q = k_1 \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \rightarrow T_2 = T_1 - q \frac{\Delta x_1}{k_1} = 39.16 - 25.2 \frac{0.1}{1.5} = 37.48^\circ \text{C}$$

$$q = k_3 \frac{T_3 - T_4}{\Delta x_3} \rightarrow T_3 = T_4 + q \frac{\Delta x_3}{k_3} = 25.04 + 25.2 \frac{0.1}{1.2} = 27.6^\circ \text{C}$$

Irraggiamento

Qualsiasi corpo con una temperatura $T > 0$ K emette radiazione elettromagnetica, detta radiazione termica, dovuta essenzialmente al moto di agitazione (detta appunto agitazione termica) delle cariche elettriche che compongono la materia.

A differenza della conduzione e della convezione, l'irraggiamento non ha bisogno di mezzo materiale interposto per propagarsi.

L'energia elettromagnetica assorbita da un corpo viene trasformata in energia interna e quindi in agitazione molecolare.

Si ricorderà che l'energia interna è proporzionale, tramite il calore specifico a volume costante, alla temperatura assoluta del corpo stesso e quindi si intuisce come mai l'incremento dell'energia interna porti ad incremento della temperatura del corpo.

Si sottolinea l'importanza dell'irraggiamento: è tramite questa forma di trasmissione dell'energia che il sole ci riscalda.

Lo studio dell'irraggiamento presenta aspetti matematici complessi. Qui si cercherà di semplificare al massimo tale trattazione ricordando solamente le leggi fondamentali.

Iniziamo con il dare l'espressione della potenza che una superficie S di un corpo a temperatura T (in gradi Kelvin) emette per irraggiamento:

$$P = \varepsilon S \sigma T^4 \quad (19)$$

Essa viene detta legge di Stephan-Boltzmann, dove σ è la costante di Stephan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$) ed ε è il potere emissivo (o emissività) del corpo e si ha sempre $\varepsilon \leq 1$. Quando $\varepsilon = 1$ il corpo viene detto corpo nero, altrimenti corpo grigio.

L'intensità (nel caso della radiazione si preferisce usare questa parola al posto di densità di flusso, quindi al posto della lettera q usata precedentemente ora useremo la lettera I) si ha:

$$I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (20)$$

Ad esempio un corpo con emissività di 0.8 e temperatura di 1200 K emette una energia per ogni metro quadrato della sua superficie e per ogni secondo pari a

$$I = \varepsilon \sigma T^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1200^4 = 9.4 \cdot 10^4 \text{ W} / \text{m}^2$$

Ora consideriamo che lo stesso corpo che emette radiazione termica è in grado anche di assorbirla, e se il bilancio energetico non è in parità può riscaldarsi o raffreddarsi. Vediamo meglio queste due caratteristiche di ogni corpo.

Coefficiente di assorbimento a : indica la frazione della radiazione incidente che un corpo assorbe. Può assumere valori da 0 (nessuna radiazione assorbita) e 1 (tutta la radiazione assorbita).

Un oggetto nero opaco ha $a = 1$, mentre un oggetto perfettamente riflettente ha $a = 0$.

Emissività ε : indica l'efficienza con cui un corpo emette radiazione termica rispetto a un corpo nero ideale che ha una emissività pari ad 1 (un corpo nero è un oggetto teorico che assorbe e riemette tutta la radiazione incidente che rappresenta la massima radiazione possibile a una data temperatura). Anche l'emissività varia tra 0 e 1.

La legge di Kirchoff per la radiazione termica afferma che, per un corpo in equilibrio termico con il suo ambiente a una data lunghezza d'onda e temperatura:

$$a(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)$$

In altre parole: se un corpo assorbe bene la radiazione incidente su di esso (alto valore di a), sarà anche un buon emettitore (alto valore di ϵ).

Un corpo che riflette o trasmette la maggior parte della radiazione (basso valore di a) sarà anche un cattivo emettitore (basso valore di ϵ).

Questa uguaglianza si applica in condizioni di equilibrio termico radiativo, ma potrebbe non valere esattamente se ci sono condizioni particolari (es. differenze nella lunghezza d'onda della radiazione incidente ed emessa).

I valori dei coefficienti di emissività e assorbività dei materiali usati nei calcoli ingegneristici sono normalmente i valori mediati sullo spettro, riferiti alla radiazione solare e a una temperatura di riferimento dell'oggetto. Questi valori (di assorbività ed emissività) appunto perché non sono riferiti ad una sola lunghezza d'onda possono variare sensibilmente fra loro, come si vede dalla seguente tabella.

Materiale della superficie	a_s	ϵ
Asfalto	0,90	0,90
Calcestruzzo	0,60	0,88
Laterizio	0,63	0,93
Marmo bianco	0,46	0,95
Neve	0,28	0,97
Pelle umana	0,62	0,97
Vernice bianca	0,14	0,93
Vernice nera	0,97	0,97

Occorre però tenere presente che un corpo di una data emissività non emette isotropicamente.

La radiazione emessa da un corpo non è sempre isotropica, cioè non viene distribuita uniformemente in tutte le direzioni dello spazio. Questo comportamento dipende da diversi fattori, come la geometria del corpo, le sue proprietà superficiali e la sua temperatura. Vediamo nel dettaglio:

- **Geometria del corpo:**

Se il corpo ha una forma irregolare, come una superficie curva o un angolo, la radiazione emessa in direzioni diverse può variare a seconda dell'orientamento locale della superficie. Ad esempio, una superficie piana irraderà in maniera più intensa perpendicolarmente alla sua area rispetto a direzioni oblique.

- **Emissività direzionale:**

La radiazione emessa varia con l'angolo rispetto alla normale alla superficie. Superfici come i metalli lucidi tendono a emettere radiazione in direzioni preferenziali a causa delle loro proprietà di riflessione e della struttura microscopica.

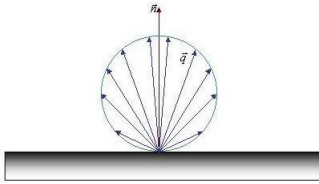
- **Polarizzazione e materiali anisotropi:**

Se il materiale è anisotropo (ha proprietà che cambiano con la direzione), la radiazione sarà più intensa in certe direzioni. Ad esempio, materiali cristallini possono emettere più radiazione lungo alcune direzioni dei loro assi cristallini.

Per molte superfici ideali, l'intensità della radiazione segue la legge di Lambert:

$$I(\theta) = I_0 \cos\theta$$

Dove I_0 è l'intensità massima della radiazione nella direzione normale alla superficie ($\theta = 0$).



Per quanto riguarda l'assorbimento di un corpo per irraggiamento, vale la seguente relazione

$$P_{ass} = a S I_0$$

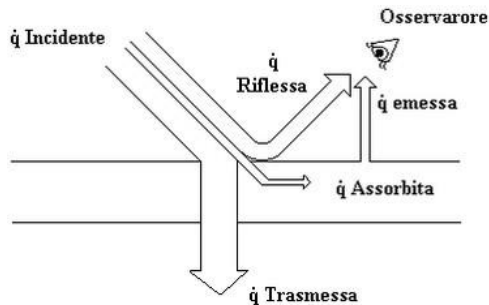
Dove a è il coefficiente di assorbimento (che misura la frazione di energia incidente che il corpo assorbe, esso dipende dalla natura del materiale e dalla lunghezza d'onda della radiazione), S la superficie del corpo e I_0 è l'intensità (o densità di flusso) della radiazione incidente.

Dunque per un corpo che si trova in equilibrio termico, la potenza assorbita è uguale alla potenza emessa, avendosi:

$$P_{emessa} = P_{assorbita}$$

$$a S I_0 = \epsilon \sigma S T^4$$

Tutti i corpi dunque emettono radiazione, ed abbiamo visto con quale potenza emettono, ma cosa accade ad un corpo che riceve radiazione? Nel caso generale l'energia raggiante entrante si divide in tre componenti; assorbita, riflessa e trasmessa, come mostrato nella seguente figura.



Per la conservazione dell'energia, facendo riferimento alla radiazione incidente, vale la seguente relazione

$$I_{inc} = I_a + I_r + I_t$$

Dove il pedice a indica la densità di flusso assorbita, il pedice r quella riflessa ed il pedice t quella trasmessa.

Se dividiamo per I_{inc} , vengono definiti i tre coefficienti di assorbimento, di riflessione e trasmissione.

$$\frac{I_a}{I_{inc}} + \frac{I_r}{I_{inc}} + \frac{I_t}{I_{inc}} = 1 \quad \rightarrow \quad a + r + t = 1$$

$$\frac{I_a}{I_{inc}} = a; \frac{I_r}{I_{inc}} = r; \frac{I_t}{I_{inc}} = t$$

Un corpo (ideale) che non riflette nulla viene detto corpo nero e quindi sarà caratterizzato dal fatto che assorbirà tutta la radiazione incidente ed emetterà quindi esattamente quello che assorbe.

La radiazione riflessa rappresenta l'energia che il corpo non scambia con l'ambiente attraverso assorbimento o emissione, ma viene semplicemente deviata dalla sua superficie. Essa dipende fortemente dalle proprietà superficiali e ottiche del materiale, come:

Indice di rifrazione: governa il comportamento della luce incidente, influenzando il rapporto tra la riflessione speculare e quella diffusa.

Conduttività elettrica: nei materiali metallici, una conduttività elevata porta a una riflettività alta.

Rugosità superficiale: superfici più rugose tendono a diffondere la radiazione riflessa in più direzioni.

Altresì anche la radiazione trasmessa non partecipa allo scambio di calore con l'ambiente, poiché essa attraversa il corpo senza interagire (né assorbita né riflessa).

Ribadiamo ancora che lo scambio di calore per irraggiamento riguarda solo la porzione di energia assorbita ed emessa dal corpo, ed è descritto dalla emissività :

- Assorbimento: Il corpo assorbe una frazione α della radiazione incidente.
- Emissione: Il corpo emette radiazione secondo la legge di Stefan-Boltzmann, proporzionalmente alla sua emissività ϵ .

La relazione (19) può essere estesa al caso di due corpi neri, aventi temperatura T_1 e T_2 , introducendo un parametro che tiene conto di quanta energia intercettano “visivamente” le due superfici in base alla loro disposizione spaziale, avendosi

$$P = \sigma F_{1,2} (T_1^4 - T_2^4)$$

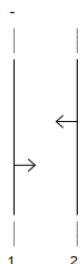
Dove $F_{1,2}$ viene detto fattore di forma (o di vista). La valutazione di F nei vari casi concreti è abbastanza complesso per cui lo omettiamo.

Si tenga presente che lo scambio radiativo fra due o più corpi neri é problema di non facile soluzione tranne in casi e geometrie semplici per altro abbastanza comuni nella realtà.

Quando due corpi hanno temperature diverse, si verifica uno scambio radiativo. Il corpo più caldo emette più energia di quanta ne riceva, mentre il corpo più freddo riceve più energia di quanta ne emetta. Questo scambio continua fino a quando i due corpi raggiungono l'equilibrio termico, ovvero la stessa temperatura. A quel punto, entrambi i corpi emettono e assorbono la stessa quantità di energia.

Diamo solo l'espressione della potenza termica scambiata per irraggiamento per tre geometrie semplici.

1. Due superfici grigie (cioè abbiano emissività indipendente dalla lunghezza d'onda) , piane e parallele con stessa superficie, con emissività ϵ_1 ed ϵ_2 , e temperatura T_1 e T_2 :



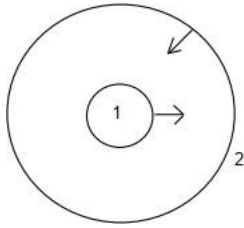
$$P = \frac{\sigma S(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (21)$$

Per superfici “nere” ossia con emissività pari ad uno si ha

$$P = \sigma S(T_1^4 - T_2^4)$$

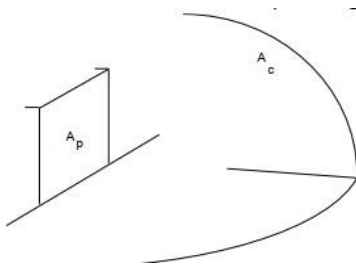
Il segno positivo di P indica che $T_1 > T_2$ e viceversa.

2. Due superfici cilindriche o sferiche concentriche, come indicato nella seguente figura



$$P = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$$

3. Una superficie di una parete che irradia verso l'ambiente esterno.



$$P = A_p \epsilon_p \sigma (T_p^4 - T_a^4)$$

Non ci addentriamo oltre questa complessa modalità di trasmissione del calore.

Alcuni esempi

1. L'intensità (densità di flusso) solare sulla superficie della Terra in estate a mezzogiorno è circa 1000 W/m², ipotizzando che la pelle esposta al sole sia circa 1 m² e che il coefficiente di assorbimento sia 0.8, calcolare quanta energia per ogni secondo riceve una persona.

$$P = a S P_{\text{incidente}} = 0.7 \cdot 1 \cdot 1000 = 700 \text{ W}$$

2. Un tetto di 10 m², in inverno ha una temperatura di 20 °C ed una emissività di 0.8, calcolare la potenza emessa.

$$P = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 10 \cdot 293^4 = 3340 \text{ W}$$

3. Su di un corpo di superficie $S = 2 \text{ m}^2$ e coefficiente di assorbimento $a = 0.8$, incide una radiazione avente intensità $I_0 = 500 \text{ W/m}^2$, qual è la potenza assorbita?

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.8 \cdot 2 \cdot 500 = 800 \text{ W}$$

4. Qual è la temperatura di un corpo, avente emissività 0.9, che emette una intensità di 1000 W/m²?

$$I = \frac{P}{S} = 1000 = \varepsilon \sigma T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{1000}{0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}} = 374 \text{ K}$$

5. Un corpo (più freddo rispetto all'ambiente) avente superficie di 1.5 m², una emissività di 0.4 ed un coefficiente di assorbimento di 0.7, ha una temperatura di 300 K. Su di esso incide una radiazione di intensità di 1000 W/m². Si calcoli il bilancio termico.

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.7 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 1050 \text{ W}$$

$$P_{\text{emessa}} = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 300^4 = 276 \text{ W}$$

Il corpo sta dunque riscaldandosi, assorbendo radiazione termica con potenza di 774 W.

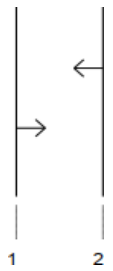
6. Un corpo (più caldo rispetto all'ambiente) con le stesse caratteristiche del problema precedente, abbia ora una temperatura di 400 K. Si calcoli il bilancio termico

$$P_{\text{ass}} = a S I_0 = 0.6 \cdot 1.5 \cdot 1000 = 900 \text{ W}$$

$$P_{\text{emessa}} = \varepsilon \sigma S T^4 = 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1.5 \cdot 400^4 = 1959 \text{ W}$$

Il corpo sta dunque raffreddando, emettendo radiazione termica con potenza di 1059 W.

7. Qual è l'energia scambiata fra due corpi grigi piani paralleli con identica superficie, con emissività di 0.9 e 0.7, aventi temperatura $T_1 = 400 \text{ K}$ e $T_2 = 300 \text{ K}$?



$$I = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (400^4 - 300^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.7} - 1} = 644 \text{ W / m}^2$$

Il valore positivo di I indica che il flusso termico netto va dal corpo a temperatura T_1 (400 K) al corpo a temperatura T_2 (300 K), come ci si aspetta quando $T_1 > T_2$. In altre parole, il corpo a 400 K sta emettendo più energia di quanta ne assorbe, mentre il corpo a 300 K sta assorbendo più energia di quanta ne emette.

Ribadiamo che il valore di 644 W/m^2 rappresenta l'intensità netta scambiata tra le due superfici piane e parallele con stessa superficie. Questo è il flusso netto di energia per unità di superficie che passa dal corpo più caldo (400 K) al corpo più freddo (300 K) a causa della differenza di temperatura e delle proprietà emissive dei due corpi.

Il corpo 1 assorbe più energia di quanta ne emetta ($1045.09 \text{ W/m}^2 > 321.49 \text{ W/m}^2$). Di conseguenza, la sua temperatura aumenterà fino a raggiungere un nuovo equilibrio termico in cui l'energia emessa e quella assorbita si equivalgono (e l'emissività sarà uguale all'assorbività). La temperatura finale dipenderà anche da come il corpo 1 può dissipare il calore in eccesso, ad esempio per conduzione o convezione, oltre che per irraggiamento.

Tempo di raffreddamento di una birretta messa in frigo

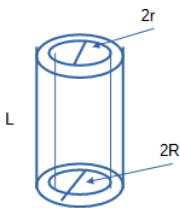


Supponiamo di mettere in frigo una bottiglia di vetro che assimiliamo ad un cilindro con raggio di base interno $r = 2.2$ cm, raggio di base esterno $R = 2.5$ cm ed altezza $L = 22$ cm (avente quindi uno spessore di $s = 0.3$ cm), ed inoltre supponiamo la densità della birra sia uguale a quella dell'acqua (in realtà è di poco superiore).

La birra si trova a temperatura ambiente di $T_1 = 20$ °C e viene messa in frigo a $T_2 = 5$ °C.

Quanto tempo impiega per portarsi all'equilibrio con la temperatura del frigo?

conducibilità termica del vetro:	$k = 1$ W/mK
calore specifico dell'acqua/birra:	$c_a = 4186$ J/kg K
calore specifico vetro:	$c_v = 837$ J/K
densità dell'acqua/birra:	$d_a = 1000$ kg/m ³
densità del vetro:	$d_v = 2400$ kg/m ³
conducibilità aria:	$k_{aria} = 0.026$ W/mK



Con i dati del problema abbiamo:

$$V = \pi r^2 L = \pi \cdot 0.022^2 \cdot 0.22 = 0.00033 \text{ m}^3 = 0.33 \text{ cl}$$

La superficie è

$$S = S_{laterale} + S_{base} = 2\pi r \cdot L + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 0.022 \cdot 0.22 + 2\pi \cdot 0.022^2 = 0.0334 \text{ m}^2$$

$$\text{Massa della birra: } m_b = \rho V = 1000 \cdot 0.00033 = 0.33 \text{ kg}$$

$$\text{Massa del vetro: } m_v = d_{vetro} V_{vetro} = d_{vetro} \cdot S \cdot s = 2400 \cdot 0.033 \cdot 0.003 = 238 \text{ g}$$

essendo lo spessore: $s = 3$ mm.

Innanzitutto vediamo quali siano i principali meccanismi di trasferimento di calore da considerare.

I. *Convezione nell'aria del frigorifero:*

Il calore si trasferisce dalla superficie della bottiglia all'aria circostante attraverso convezione forzata o naturale.

Nel frigorifero, l'aria fredda circola a causa del ventilatore (convezione forzata), favorendo il trasferimento di calore dalla bottiglia.

II. *Conduzione termica nella parete della bottiglia:*

Il calore si trasferisce attraverso il materiale della bottiglia (vetro, plastica, o altro) dalla sua superficie interna, a contatto con l'acqua calda, alla superficie esterna, che è a contatto con l'aria fredda.

III. *Convezione interna nel liquido:*

All'interno della bottiglia, il liquido trasferisce calore per convezione naturale a causa del gradiente termico: le parti più calde dell'acqua tendono a salire, mentre quelle più fredde scendono.

IV. *Scambio radiativo:*

Una piccola quantità di calore può essere trasferita tramite radiazione termica tra la superficie della bottiglia e le pareti interne del frigorifero, anche se questo effetto è generalmente trascurabile rispetto alla convezione.

V. *Conduzione termica attraverso la superficie d'appoggio:*

Se la bottiglia è appoggiata su una superficie (come una griglia o un ripiano del frigorifero), il calore può essere trasferito per conduzione dalla base della bottiglia al ripiano, se quest'ultimo è più freddo.

Fattori che influenzano il trasferimento di calore:

Materiale della bottiglia: Vetri e plastiche hanno diverse conducibilità termiche.

Spessore della bottiglia: Un maggiore spessore riduce la velocità di conduzione.

Differenza di temperatura fra il liquido ed l'aria del frigorifero.

Velocità dell'aria nel frigorifero (efficienza del ventilatore).

In sintesi:

Il raffreddamento della bottiglia è il risultato combinato di convezione (nell'aria e nell'acqua), conduzione (attraverso la bottiglia) e, in misura minore, scambio radiativo.

Supponiamo che il trasferimento di calore avvenga principalmente per conduzione.

1. Calcolo dell'energia termica (calore) che si "trasferisce" dalla birra all'ambiente interno del frigo, affinché la sua temperatura scenda fino a 5 °C.

Il calore che una massa di una certa sostanza deve cedere all'ambiente per raffreddarsi, o che deve acquistare per riscaldarsi, è data dalla (13):

$$Q = mc_p (T_{\text{finale}} - T_{\text{iniziale}}) = mc_p \Delta T$$

Dove m è la massa, " c " il calore specifico a pressione costante e ΔT è la differenza di temperatura fra il corpo e l'ambiente (ossia fra la bottiglia di birra e aria del frigo).

Con i dati del problema si ha che il calore ceduto dalla bottiglia all'aria del frigo è (in modulo)

$$Q = 0.33 \cdot 4186 \cdot 15 = 20.7 \cdot 10^3 J \quad (22)$$

2. Calcolo del flusso di calore per conduzione

Se $s = R - r \ll r$, cioè lo spessore dello strato cilindrico è piccolo rispetto al suo raggio interno, come in effetti è nel nostro caso, allora la relazione (6) valida per una geometria cilindrica, si semplifica nel seguente modo

$$P = k S_{\text{lat}} \frac{T_1 - T_2}{s} \quad (T_1 > T_2)$$

Dove S_{lat} è la superficie laterale del cilindro, in pratica se lo spessore dello strato cilindrico è piccolo esso si comporta come se fosse una parete piana.

Inserendo i valori numerici

$$P = 1.0 \cdot 0.03 \frac{20 - 5}{0.003} = 150 W \quad (23)$$

Concludendo

Conoscendo "la velocità" con la quale il calore "fugge" dalla birra, ossia il suo flusso (energia per unità di tempo, ossia la potenza), e conoscendo anche la quantità totale di calore che deve essere smaltita dalla birra per raffreddarsi è possibile calcolare il tempo occorrente per il raffreddamento.

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7 \cdot 10^3 (J)}{150 (J / s)} = 138 s \approx 2 \text{ min} \quad (24)$$

Quindi se ipotizziamo che lo scambio termico avvenga esclusivamente per conduzione il tempo di raffreddamento risulta di circa 2 minuti.



Ma...

se consideriamo che il processo di raffreddamento non è stazionario, e che la trasmissione del calore non avviene principalmente per conduzione ma per convezione, le cose cambiano di molto.

La differenza di temperatura fra la birra e l'aria interna del frigo a 5 °C non è costante, quindi il calcolo di P è sbagliato, perché ΔT non ha un valore univoco, costante appunto, durante tutto il processo. In sostanza avviene che diminuendo la differenza di temperatura tra birra e aria del frigo diminuisce anche il flusso termico scambiato e quindi il fenomeno non è stazionario, cioè il flusso termico non è costante e questo cambia sostanzialmente le carte in tavola.

Quindi il calcolo di P fatto nella (23) è sbagliato. Come sbagliato sarebbe usare la (8) che va usata solo in caso di stazionarietà. Infatti si avrebbe.

Premettendo che le indicazioni tipiche per h sono:

- Convezione naturale in aria (a bassa velocità): h varia generalmente tra 2 e 25 W/m²K.
- Convezione forzata in aria (con ventola): h può salire a valori tra 10 e 50 W/m²K, a seconda della velocità dell'aria.

Tenendo conto che nei frigoriferi è presente una ventola, è lecito prendere per h il valore medio di 30 W/m²K.

$$P = hS \Delta T = 30 \cdot 0.03 \cdot 15 = 13.5 W \quad (26)$$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{20.7 \cdot 10^3 (J)}{13.5 (J / s)} = 1533 s$$
$$t = 25 \text{ min} \quad (27)$$

Occorre dunque usare la (18).

$$\tau \equiv \frac{1}{K} = \frac{(mc_p)_{\text{sistema}}}{hS}$$

Con i seguenti valori dei calori specifici, rispettivamente per il vetro e la birra:

$c_v = 837 \text{ J/kg K}$ $c_b = 4186 \text{ J/kg K}$, e assumendo per h il valore 30 (W/m²K), si ha:

$$\tau = \frac{m_v c_v + m_b c_b}{hS} = \frac{0.238 \cdot 837 + 0.33 \cdot 4186}{30 \cdot 0.0334} = \frac{1580}{0.19} = 1576 s = 26 \text{ min} \quad (28)$$

Ritenendo che il tempo di raffreddamento (che ha un andamento asintotico) si concluda dopo un tempo di 5 τ , con questo modello di calcolo si avrebbe la birra fresca dopo

$t = 5 \tau = 2.2 \text{ h} \quad (29)$

Si tenga presente che questo modello è anch'esso approssimativo in quanto non tutta la birra è a contatto con il vetro del contenitore, pertanto il raffreddamento non è omogeneo (punto 4 delle condizioni per l'applicazione della legge), inoltre sulla superficie esterna del contenitore si forma una pellicola di aria che ha senz'altro una temperatura maggiore di 5 °C.

Siamo dunque arrivati alla conclusione che questo problemino, all'apparenza banale, non ha una soluzione semplice ed immediata a causa della presenza della costante convettiva che non è di semplice determinazione, come abbiamo visto. Per procedere in modo sensato si dovrebbe "prima" valutare il valore di h sperimentalmente, cioè misurando come decresce la temperatura con il trascorrere del tempo...ma a quel punto, non ci servirebbe più fare alcun calcolo!

Si potrebbe, infatti, calcolare K (costante di decadimento) ad esempio misurando in tempo occorrente affinché la temperatura del liquido scenda dell'80% rispetto al ΔT , ossia fino a 8 °C, realisticamente da esperienze fatte tale tempo è dell'ordine dei 40 min (2400 s),

$$T(t^*) = 8^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C} + \Delta T e^{-Kt^*}; \quad 3 = \Delta T e^{-Kt^*}; \quad e^{-Kt^*} = 0.2; \quad -Kt^* = \log 0.2 = -1.6$$

Usare i gradi Celsius o Kelvin è indifferente.

$$K = \frac{1.6}{2400} = 0.37 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{K} = 1500 \text{ s} = 25 \text{ min}$$

quindi il tempo di raffreddamento sarebbe

$t = 5 \tau = 2.1 \text{ h} \quad (31)$

Infine si potrebbe usare un approccio diverso facendo riferimento alle equazioni del transito termico considerando due aspetti:

- La convezione esterna con l'aria in termini di resistenza termica
- la convezione all'interno della bottiglia in termini di resistenza termica

Ci riferiamo alla situazione descritta sopra di una bottiglietta schematizzata come un cilindro di vetro (con spessore di 3 mm) avente raggio di base di 2.2 cm ed altezza 22 cm, quindi con volume $V = 33 \text{ cl}$, superficie $S = 0.0334 \text{ m}^2$, massa della birra $m_b = 0.33 \text{ kg}$ (avendo assunto la densità della birra uguale a quella dell'acqua), massa del vetro $m_v = 0.238 \text{ kg}$, ed inoltre usiamo per h il valore usato sopra, $h = 30$.

Richiamiamo il concetto di resistenza termica: esso è la capacità di un materiale di opporsi al flusso di calore che tende ad attraversarlo.

Ricordando che

la conduzione: si riferisce al trasporto di calore attraverso un materiale solido o tra solidi in contatto diretto fra loro, essa avviene anche nei liquidi o gas ma in questi casi il loro contributo è molto basso,

la convezione: riguarda il trasporto di calore tra una superficie solida e un fluido (gas o liquido) in movimento oppure in quiete, riportiamo le formule della resistenza termica nei due casi.

Nel caso della conduzione:

$$R_{\text{conduzione}} = \frac{\Delta x}{kS} \quad (32)$$

Dove Δx è lo spessore del materiale attraverso il quale avviene lo scambio termico e k è la conducibilità termica del materiale, mentre S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Mentre nel caso della convezione si ha

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{hS} \quad (33)$$

Dove h il coefficiente di scambio convettivo ed S è l'area attraverso la quale avviene lo scambio termico.

Useremo dunque un approccio basato sul seguente risultato, noto dalla teoria:

$$\tau = RC \quad (34)$$

Che ci dice che il tempo di decadimento termico è pari al prodotto della resistenza termica del sistema (birra + vetro), per la sua capacità termica che abbiamo calcolato più sopra ($C = 1580 \text{ J/K}$).

Occorre dunque calcolare R che è la somma di tre contributi: la resistenza convettiva introdotta dalla superficie della bottiglia con l'aria del frigo, la resistenza convettiva all'interno del liquido stesso, ed infine anche la resistenza di conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia con l'aria all'interno del frigo. Come vedremo il termine preponderante è lo scambio convettivo "esterno" alla bottiglia. Useremo per il valore di h fra l'aria del frigo e la birra useremo il valore di $500 \text{ W/m}^2\text{K}$ - dalla letteratura si evince che i valori del coefficiente convettivo per l'acqua (che assumiamo uguale a quello della birra) sono compresi fra 500 e $10\,000 \text{ W/m}^2\text{K}$ -.

Resistenza convettiva all'interno del liquido:

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{h_{\text{birra}} S} = \frac{1}{500 \cdot 0.030} = 0.067 \text{ K/W} \quad (35)$$

Resistenza convettiva esterna fra superficie di vetro della bottiglia e l'aria del frigo:

$$R_{\text{convezione}} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{30 \cdot 0.0334} = 0.998 \text{ K/W} \quad (36)$$

Resistenza termica per conduzione introdotta dalla presenza della "parete" di vetro della bottiglia:

$$R_{\text{conduzione}} = \frac{\Delta x}{k_{\text{vetro}} S} = \frac{0.003}{1.0 \cdot 0.0334} = 0.089 \text{ K/W} \quad (37)$$

(essendo la conducibilità del vetro $k_{\text{vetro}} = 1 \text{ W/mK}$)

La costante di tempo vale

$$\tau = RC = (0.067 + 0.998 + 0.089) \cdot 1580 = 1823 \text{ s} = 30 \text{ min}$$

Il tempo di raffreddamento valutato da questa analisi è

$$t = 5 \tau = 2.5 \text{ h} \quad (38)$$

Dopo questo excursus possiamo infine affermare che la nostra birretta si raffredderà in un tempo di circa 2 ore e mezza.

Per sottolineare ulteriormente che l'aspetto predominante è quello convettivo possiamo ricorrere ad un parametro indicatore detto numero di Biot definito come $Bi = \frac{R_{conduttiva}}{R_{convettiva}}$, nel nostro caso vale

$$Bi = \frac{0.089}{0.067 + 0.98} = 0.084$$

Se il numero di Biot, è molto minore di 1, si può ritenere che la resistenza conduttiva sia trascurabile rispetto a quella convettiva, e questo è proprio quello che accade nel nostro caso.

Verifichiamo infine che lo scambio termico per irraggiamento è trascurabile, assumendo che lo scambio avvenga fra due superfici piane e parallele

$$q = \frac{\sigma S (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Assumendo per l'emissività dell'aria e del vetro un valore rispettivamente di 0.01 e 0.8, per S il valore già calcolato di $S = 0.0334 \text{ m}^2$, si ha che potenza scambiata per unità di area (densità di flusso che la parete del frigo riceve dalla bottiglia.) è

$$q = \frac{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (293^4 - 278^4)}{\frac{1}{0.01} + \frac{1}{0.8} - 1} = \frac{79.2}{100.25} = 0.79 \text{ W / m}^2$$

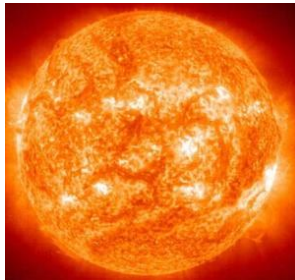
Confermando che effettivamente è corretto trascurare lo scambio termico per irraggiamento.

Questo problema mostra come pur conoscendo le equazioni che regolano un certo fenomeno fisico, spesso questo non è sufficiente per calcolare in modo dettagliato certe grandezze a causa della presenza nelle equazioni di parametri fenomenologici i cui valori dipendono dalla particolare configurazione geometrica e fisica del sistema.

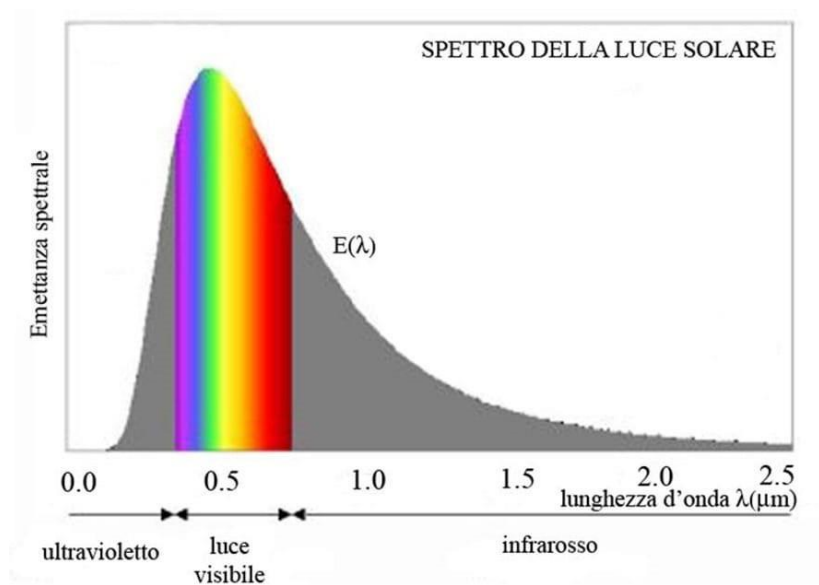
Il bilancio termico terrestre ed effetto serra

a cura di Giancarlo Buccella

Spettro di emissione del Sole



Il Sole emette su tutto lo spettro, dai raggi gamma alle onde radio, ma circa **il 99% della radiazione ha lunghezza d'onda compresa tra 0.15 e 4 μm** con un massimo di intensità a circa 0.5 μm .



La radiazione solare che raggiunge la superficie terrestre:

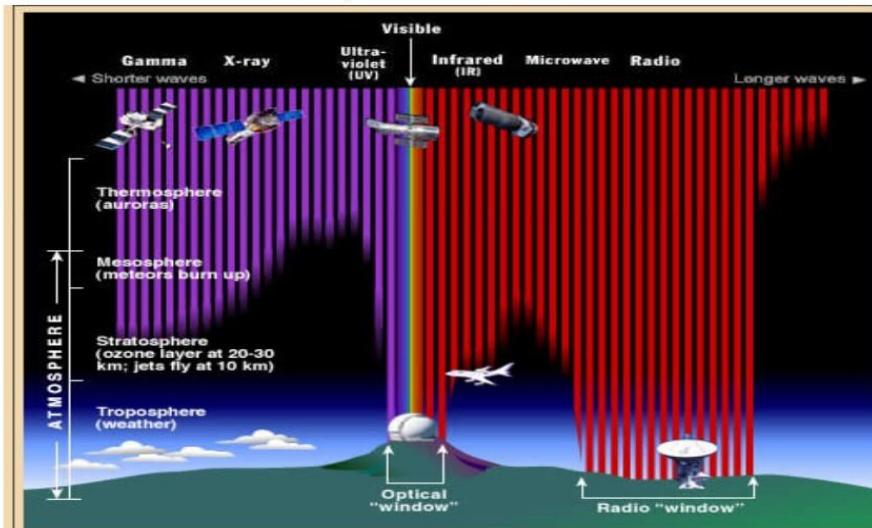
10% - radiazione ultravioletta (0.15 μm ÷ 0.4 μm)

50% - radiazione visibile (0.4 μm ÷ 0.8 μm)

40% radiazione infrarossa (0.8 μm ÷ 4 μm)

Nella seguente illustrazione viene mostrato quello che arriva al suolo della radiazione solare.

Radiazione che arriva a terra: the optical window



Come si vede anche la banda delle microonde e onde radio arriva al suolo essendo l'atmosfera trasparente ad esse, ma le loro intensità sono di 6-7 ordini di grandezza inferiori alle intensità della radiazione ottica, e non sono neanche strumentalmente misurabili.

Per quanto riguarda le radiazioni a corta lunghezza d'onda ossia raggi gamma, raggi X e UV lontano (fra $0.01 \mu\text{m}$ e $0.2 \mu\text{m}$) emessi dal Sole essi vengono in larga parte assorbiti dall'atmosfera terrestre. La nostra atmosfera agisce come uno schermo naturale contro i raggi X e altre radiazioni ionizzanti provenienti dal Sole e dallo spazio. Questo fenomeno è dovuto alla capacità di assorbimento dei gas atmosferici. Gli strati superiori dell'atmosfera, come la ionosfera, assorbono i raggi X a bassa energia, ma la maggior parte dei raggi X, quelli ad alta energia, vengono assorbiti dalla troposfera, la parte più bassa dell'atmosfera. Tuttavia, alcune frazioni percentuali (trascurabili), di tale radiazione può raggiungere comunque la superficie terrestre, specialmente durante le eruzioni solari o altri eventi solari intensi.

Al limite esterno dell'atmosfera, su una superficie di 1 cm^2 , posta perpendicolarmente alla direzione dei raggi solari, arrivano circa 8.1 J/min , questa quantità di energia non mostra significative variazioni nel tempo ed è chiamata costante solare (C):

$$C = 1367 \text{ W/m}^2$$

Quando la radiazione raggiunge l'atmosfera si possono verificare tre fenomeni.

- **Riflessione:** le radiazioni che arrivano sulle nubi e al suolo vengono riflesse senza perdere energia: circa il **30%** (indicativamente circa il 25% dall'atmosfera e 5% dal suolo).
- **Diffusione:** le radiazioni solari viaggiano in linea retta ma le molecole d'acqua e di aerosol le diffondono in tutte le direzioni (il fenomeno della diffusione spiega ad esempio perché risultano illuminate anche zone che non ricevono direttamente la luce solare).
- **Assorbimento:** le radiazioni sono assorbite dalle molecole di alcuni gas e dalle nubi e dal suolo ed in parte vengono riemesse con lunghezza d'onda maggiore (infrarosso): circa il **70%** (20% dall'atmosfera e 50% dal suolo).

Il ritorno dell'energia nello spazio avviene perciò attraverso due modalità.

- riflessione: le radiazioni sono respinte;
- irraggiamento: le radiazioni (UV, visibile e IR) sono assorbite e poi riemesse nell'infrarosso.

Questi sono valori medi, perché la radiazione varia in funzione della latitudine, stagione, ora, presenza di nubi, ecc... La radiazione riflessa complessivamente dalla Terra (30%) costituisce l'albedo.

Le radiazioni assorbite riscaldano il sistema ad una certa temperatura di equilibrio T . Si ricordi che un corpo per il solo fatto che possiede una certa temperatura emette radiazione (spesso chiamata radiazione termica) secondo la legge di Stefan-Boltzmann con una intensità totale di emissione è data dalla semplice relazione $I = \sigma T^4$ (W/m^2) dove σ è una costante (detta costante di Boltzmann), e che l'emissione della radiazione termica avviene non su una singola frequenza bensì su una banda di frequenze, come illustrato dalla figura iniziale dello spettro solare. Per calcolare lo spettro a partire dalla conoscenza della temperatura del corpo occorre usare la seguente formula di emissione di corpo nero di Planck:

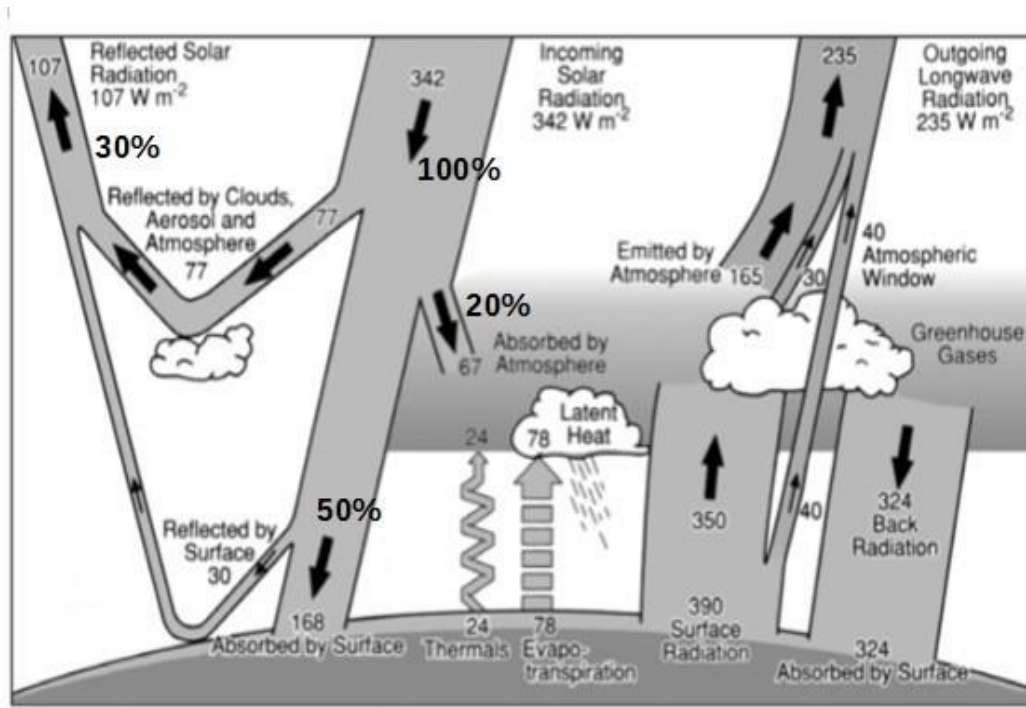
$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu / k_B T) - 1} \quad (W / m^2)$$

dove ε è l'intensità specifica. Ora se si calcola ε per varie frequenze si vede che **l'intensità della radiazione emessa dalla Terra** (che ha una temperatura media di $15^\circ C$), è **praticamente tutta concentrata nell'infrarosso, tra 5 e 25 μm con il massimo dell'emissione a 10 μm** . Questa radiazione non si disperde direttamente nello spazio ma va a riscaldare l'atmosfera dal basso la quale ne trattiene la maggior parte, circa il 90%, riemettendola in tutte le direzioni (effetto serra). Grazie a questo fenomeno la Terra ha una temperatura media di $15^\circ C$ anziché i $-20^\circ C$ che avrebbe se non fosse presente l'atmosfera. Come mai allora la Terra non si riscalda con il passare del Tempo?

L'equilibrio termico della Terra è garantito da due distinti meccanismi non radiativi che trasferiscono l'energia dalla superficie terrestre all'atmosfera, che a sua volta la disperde nello spazio.

L'evapotraspirazione, cioè l'evaporazione di tutte le acque superficiali presenti sulla Terra (oceani, mari, laghi, ecc.) unita alla traspirazione delle piante, assorbe il 25% della radiazione solare. Questa energia poi si libera di nuovo come calore latente nei processi di condensazione del vapore acqueo atmosferico che avvengono in quota (nubi) o al suolo (nebbia, brina, rugiada). Il 5% dell'energia passa direttamente dal suolo o dal mare all'aria sovrastante, che per i moti di convezione si riscalda e sale in quota, disperdendo poi il calore nello spazio (calore sensibile). Se si sommano radiazione terrestre, calore latente e calore sensibile si ottiene un perfetto equilibrio tra energia in entrata ed energia in uscita dalla Terra: il bilancio energetico globale del nostro pianeta è nullo e quindi la Terra, nel complesso, non si riscalda né si raffredda. Questo però non vale se si considerano brevi periodi di tempo o zone limitate di superficie terrestre: in questo caso il bilancio energetico può essere negativo o positivo.

La seguente illustrazione mostra il bilancio radiativo fra la radiazione solare e la Terra.



Bilancio radiativo

Abbiamo visto che l'intensità media della radiazione solare al top dell'atmosfera è di 342 W/m², allora si ha:

$$I_{0,ave} = I_{riflessa} + I_{assorbita, atm} + I_{assorbita, superficie}$$

Ed i loro valori numerici, in W/m² sono (come noto dai dati sperimentali):

342 (rad. incidente media al top dell'atmosfera) = 107 (riflessa) + 67 (ass atm) + 168 (ass. sup.), arrotondando le percentuali possiamo scrivere,

$I_{riflessa} = 30\% (107 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass atm} = 20\% (67 \text{ W/m}^2)$
$I_{ass sup} = 50\% (168 \text{ W/m}^2)$

Se ora calcoliamo l'intensità di emissione della Terra (avente temperatura media di 15°C \equiv 288 K) ci accorgiamo che essa è maggiore dell'intensità in entrata (342 W/m²), infatti si ha

$$I_{terra} = \sigma T^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 288^4 = 390 > 342 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque ci deve essere un'altra sorgente di radiazione diretta verso la superficie, altrimenti in questo modo la Terra si raffredderebbe immediatamente, essa è data dalla radiazione infrarossa emessa dall'atmosfera verso la superficie, pari a 324 W/m² (valore sperimentale), questo è il cosiddetto "effetto serra", esso consiste dunque al fatto che l'atmosfera non lascia passare tutta la radiazione proveniente dalla superficie terrestre ma solo una parte, circa il 10%, mentre il restante 90% circa viene assorbito (circa 350 W/m²), assorbendo questa radiazione l'atmosfera si riscalda e riemette radiazione infrarossa suddivisa in due flussi, 324 W/m² verso la superficie e circa 40 W/m² in uscita verso lo spazio.

Calcoliamo il bilancio per quanto riguarda la superficie terrestre:

rad. Solare + rad infrarossa dall'atmosfera – rad. termica emessa

$$168 + 134 - 390 = 102 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Dunque la Terra mediamente sembrerebbe avere un surplus di energia radiante pari a 102 W/m², che deve perdere in qualche modo altrimenti si riscalderebbe.

Passiamo ora all'atmosfera: in ingresso si hanno i 67 W/m² della radiazione solare, dei 390 W/m² della superficie terrestre 350 W/m² vengono assorbiti (cioè il 90%), gli altri 40 W/m² sono dispersi nello spazio attraverso la finestra atmosferica. In uscita invece si ha che l'atmosfera emette radiazione infrarossa per 324 W/m² verso la superficie e 195 W/m² verso lo spazio, suddivisi in 165 emessi da atmosfera libera e 30 emessi da nubi. In breve abbiamo:

energia in entrata – energia in uscita

(rad. Solare + rad. IR emessa dalla superficie) – (rad. IR emessa dall'atmosfera)

$$(67 + 350) - (324 + 195) = -102 \text{ W/m}^2$$

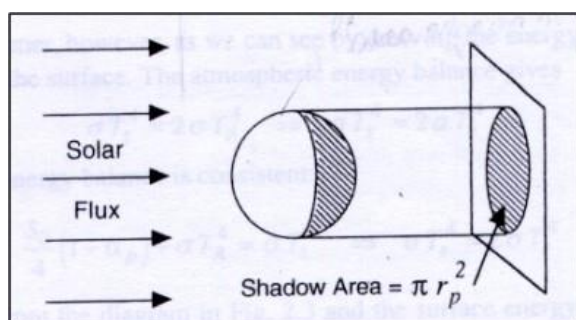
cioè l'atmosfera perde mediamente energia verso lo spazio esterno e quindi tende a raffreddarsi, ma questi 102 W/m^2 vengono ripresi dalla superficie che li ha in eccesso, come abbiamo visto nel calcolo precedente. In che modo? Attraverso il rilascio di calore sensibile (24 W/m^2 , per conduzione) e calore latente (78 W/m^2 , attraverso l'evapotraspirazione). Se si calcola la radiazione in uscita dall'atmosfera (infrarossa emessa + solare riflessa + finestra atmosferica) si ottiene esattamente il valore in ingresso cioè 342 W/m^2 ottenendo così un perfetto bilancio energetico.

Temperatura di emissione di un pianeta

La temperatura di emissione di un pianeta è per definizione la temperatura di corpo nero con la quale esso deve emettere per raggiungere il bilancio energetico, ovvero l'equilibrio tra energia incidente ed emessa. Essa è quindi la temperatura per cui si ha:

$$\text{radiazione solare assorbita} = \text{radiazione emessa dal pianeta}$$

Per calcolare la radiazione solare assorbita, partiamo dalla costante solare S_0 che rappresenta l'energia per unità di area e di tempo che raggiunge una superficie perpendicolare posta alla distanza Sole-Terra pari ad 1 u.a. Quindi l'energia incidente sul pianeta è data dal prodotto della costante solare per l'area che il pianeta espone alla radiazione incidente perpendicolarmente ad essa (nell'approssimazione che i raggi solari siano paralleli, approssimazione valida in quanto il diametro dei pianeti è molto minore della loro distanza dal sole). Tale superficie si chiama “shadow area” (vedi figura seguente).



Quindi al top dell'atmosfera terrestre l'intensità della radiazione solare riferita all'unità di area posta perpendicolarmente alla radiazione, vale:

$$\text{Intensità al top dell'atmosfera} = I_0 = 1367 \text{ W / m}^2$$

Questo flusso incide alla shadow area (area “associata” dell’emisfero illuminato) di πR^2 (indicando con R il raggio della Terra)

$$\text{Radiazione incidente alla shadow area} \equiv I_a = I_0 \pi R^2 \quad (\text{W})$$

Questo è un valore teorico mentre è senz’altro più utile riferirsi all’intensità media spalmata su tutta la superficie dell’emisfero illuminato, e poiché la Terra ruota occorrerà riferirsi (cioè spalmare) l’intensità incidente su tutta la superficie della sfera terrestre, che vale $4\pi R^2$, avendosi

$$I_{0,ave} = \frac{I_a}{4\pi R^2} = \frac{I_0 \pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{I_0}{4} = \frac{1367}{4} = 342 \text{ W / m}^2$$

Questa è l’intensità *media* (cioè spalmata su tutta la superficie terrestre) della radiazione solare incidente sulla Terra al top dell’atmosfera.

Ora bisogna tenere presente che non tutta la radiazione incidente viene assorbita, ma parte di essa viene riflessa. La misura della riflettività di un pianeta è detta albedo. Albedo = α = frazione di radiazione riflessa dal pianeta, per la Terra esso vale 0.3, cioè circa il 30% della radiazione incidente viene riflessa nello spazio.

Per dare alcuni riferimenti quantitativi di albedo si veda la seguente tabella.

Neve fresca	0.9
Oceano	0.1
Prato	0.2
Deserto	0.4
Valore medio terrestre	0.3

Quindi tenendo conto dell’albedo l’intensità media assorbita dal sistema Terra + atmosfera, ossia l’energia che entra nel sistema, è:

$$\text{radiazione media assorbita: } I_a = \frac{I_0}{4} (1-\alpha) = 70\% I_{0,ave} = \frac{1367}{4} (1-0.3) = 240 \text{ W / m}^2$$

Questo significa che i restanti 102 W/m² devono tornare verso lo spazio.

A) Temperatura di emissione della Terra senza considerare l'atmosfera

Per determinare la temperatura di emissione del pianeta Terra si deve quindi eguagliare la radiazione assorbita appena calcolata con quella emessa da un corpo nero alla temperatura T, che si ricava dalla legge di Stefan-Boltzmann che afferma che l'intensità della radiazione emessa da qualsiasi corpo che abbia una certa temperatura T vale: $I = \sigma T^4$ (dove σ è la costante di Boltzmann che vale $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$), uguagliando le due intensità in entrata (assorbita dal sistema) e uscita:

$$I_{\text{assorbita}} = I_{\text{emessa}} \quad (\text{energia assorbita} = \text{energia emessa})$$

$$\frac{I_0}{4} (1-\alpha) = \sigma T_e^4$$

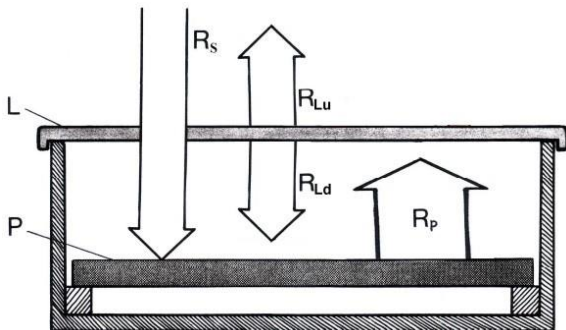
$$T_e = \sqrt[4]{\frac{I_0}{4\sigma} (1-\alpha)} = \sqrt[4]{\frac{1367}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}} (1-0.3)} = 255 \text{ K} = -18^\circ\text{C}$$

Questo valore della temperatura media per il pianeta Terra è evidentemente molto minore del valore osservato, pari a circa $288\text{K} = 15^\circ\text{C}$. Per capire questa differenza bisogna prendere in considerazione l'effetto serra. In questo calcolo infatti abbiamo trascurato la presenza dell'atmosfera, quindi la temperatura trovata non è quella reale, ma quella che si avrebbe in assenza di atmosfera. Si può quindi concludere che il sistema Terra-atmosfera non può essere semplicemente considerato come un corpo nero che emette alla temperatura della superficie terrestre, in quanto gran parte della radiazione infrarossa emessa dalla Terra viene assorbita dall'atmosfera, (90% circa). In tal senso quindi, la temperatura della superficie terrestre non rispecchia quella di un corpo nero in equilibrio con la radiazione solare incidente. La temperatura di emissione così ottenuta risulta però essere in buon accordo con la temperatura della tropopausa. La ragione di tutto ciò risiede nel fatto che la tropopausa rappresenta il limite sopra al quale non c'è più apprezzabile assorbimento di radiazione IR, quindi il sistema visto dalla tropopausa è in effetti approssimabile al corpo nero in termini di emissione, in equilibrio con la radiazione solare incidente.

Effetto serra

Consideriamo per iniziare il caso di una serra avente un tetto “ideale”, ossia trasparente a tutta la radiazione solare tranne la componente nel lontano infrarosso, frazione molto piccola dell’intera radiazione solare (infatti abbiamo visto che quasi tutta la radiazione solare è compresa fra 0.15 e 4 μm e che invece assorba *tutta* la radiazione termica nell’infrarosso lontano, diciamo oltre i 4 μm , sappiamo infatti che la radiazione emessa dalla superficie terrestre è compresa fra 5 e 25 μm , quindi in questa banda il vetro della serra è opaco mentre è perfettamente trasparente per la banda entrante fra 0.15 e 4 μm).

Ovviamente nessun materiale realizza esattamente queste condizioni, ma alcuni le approssimano abbastanza bene, il vetro ne è un ottimo esempio; comunque l’assorbimento dipende sempre anche dallo spessore della lastra. Il tetto L (vedi figura) riceve e assorbe energia dalla radiazione termica R_p emessa dalla piastra (terreno), quindi si riscalda ed emette radiazione verso l’esterno R_{Lu} (up) e verso la piastra R_{Ld} (down). Nella situazione stazionaria ora la piastra deve emettere una quantità di energia radiante infrarossa in grado di bilanciare l’energia che riceve dal Sole e quella che riceve dal tetto R_{Ld} .



Bilancio radiativo:

$$R_s + R_{Ld} = R_p \quad (a)$$

$$R_p = R_{Lu} + R_{Ld} \quad (b)$$

Sommando membro a membro

$$R_s + R_{Ld} + R_p = R_p + R_{Lu} + R_{Ld} \quad \text{ossia}$$

$$R_s = R_{Lu} \quad (\text{energia entrante} = \text{energia uscente})$$

per le proprietà del vetro del tetto della serra si può porre $R_{Ld} \cong R_{Lu}$ (poco assorbimento, vetro sottile), dunque

$R_S = R_{Ld}$ ed allora dalla (a) ne viene che

$$R_p = 2R_S \quad (1)$$

Ciò significa che il flusso di radiazione dal coperchio alla piastra R_{Ld} è circa uguale a quello del sole così che l'energia totale che arriva alla piastra è il doppio dell'energia che arriva in assenza del tetto e la piastra dovrà ora emettere un'energia doppia di quella che arriva sulla piastra dal sole. Per valutare questo aumento di temperatura dobbiamo ricorrere alla legge di Stefan–Boltzmann.

L'energia emessa, o meglio e più precisamente la sua intensità (energia emessa ogni secondo riferita all'unità di superficie- W/m^2) da un corpo per radiazione termica è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta (Legge di Stefan-Boltzmann)

$$I = \sigma T^4$$

Si ha evidentemente $R_p = \sigma T_{superficie}^4$; $R_S = I_a$

Avendo indicato con I_a l'intensità assorbita dal sistema (cioè in entrata)

allora la relazione (1) ci dice che

$$\sigma T_{sup}^4 = 2I_a$$

$$T_{sup} = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}}$$

Se invece rimuoviamo la serra si ha: energia entrante = energia uscente $I_a = \sigma T_{sup,0}^4$ cioè

$$T_{sup,0} = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}} \text{ avendosi}$$

$$T_{sup} = \sqrt[4]{2} T_{sup,0}$$

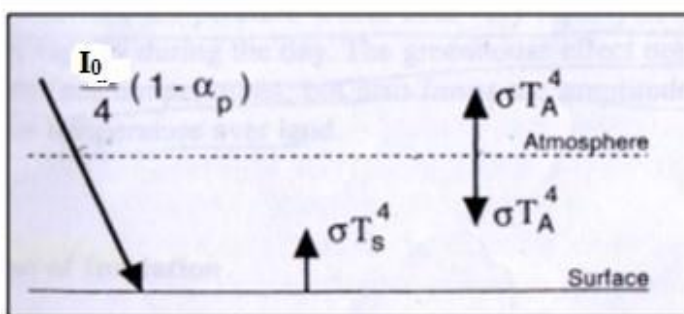
cioè

$$T_{sup} = 2^{1/4} T_{sup,0} = 1.189 T_{sup,0} \approx T_{sup,0} + 0.2 T_{sup,0} = T_{sup,0} + 20\% T_{sup,0}$$

In conclusione la presenza della serra, con le premesse fatte, fa aumentare la temperatura al suolo del 20%.

B) Temperatura di emissione della Terra considerando l'atmosfera come corpo nero

Tornando al nostro sistema consideriamo un'atmosfera costituita da un unico strato a temperatura T_A che si comporti come un corpo nero nei confronti della radiazione terrestre (ossia con emissività $\varepsilon = 1$) ma che sia trasparente alla radiazione solare (in analogia al comportamento della serra). L'atmosfera risulta quindi in grado di interagire in modo assai differente con la radiazione terrestre (infrarosso lontano) e solare (ultravioletto, visibile e infrarosso vicino). Calcoliamo il bilancio energetico per questo sistema Terra-atmosfera, in perfetta analogia con il calcolo precedente relativo alla serra.



Il bilancio al top dell'atmosfera: siccome l'atmosfera nel modello che stiamo considerando assorbe tutta la radiazione terrestre (infrarosso lontano) ed emette come un corpo nero, l'unica radiazione emessa verso lo spazio sarà quella atmosferica, quindi il bilancio va ora riferito alla temperatura dell'atmosfera T_A :

rad. entrante (assorbita dal sistema) = rad. uscente (dovuta al corpo nero atmosfera)

$$\frac{I_0}{4} (1 - \alpha) = \sigma T_A^4$$

o usando la notazione già introdotta, con I_a indicante l'intensità media assorbita dal sistema, si ha

$$I_a = \sigma T_A^4$$

Consideriamo ora il bilancio energetico del solo strato atmosferico, esso emette energia radiante sia verso l'alto che verso il basso, quindi l'energia uscente da essa è $2\sigma T_A^4$, mentre l'energia entrante (ricordando che atmosfera lascia passare indisturbata la radiazione entrante) è l'energia di emissione (infrarosso lontano) della superficie della Terra, indicando con T_s la sua temperatura superficiale, essa vale σT_s^4 , quindi possiamo scrivere che per l'atmosfera si ha

$$2\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Abbiamo dunque il sistema

$$I_a = \sigma T_A^4$$

$$2\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Risolvendo si ha ($I_a = 240 \text{ W/m}^2$):

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 303 \text{ K} = 30^\circ \text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 255 \text{ K} = -18^\circ \text{C}$$

Dalla prima relazione si evince che

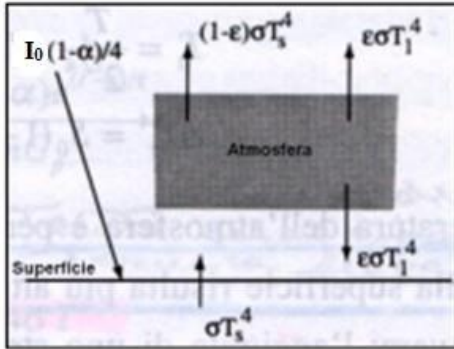
$$T_s = \sqrt[4]{2} T_A \approx 1.2 T_A$$

In accordo con quanto visto sopra per la serra.

In questo grossolano modello di schematizzazione del bilancio radiativo della Terra abbiamo ottenuto una chiara indicazione che la temperatura superficiale della Terra è sicuramente più alta di quella calcolata nel nostro primo approccio dove avevamo ignorato la presenza dell'atmosfera, ma il valore ottenuto è troppo alto, infatti la temperatura media al suolo della Terra è circa 15°C . Questa discrepanza è dovuta dall'aver considerato l'atmosfera emettere come un corpo nero, mentre in realtà non lo è. Perciò dovremo considerare la sua emissività (ϵ) e trasmissività ($1-\epsilon$) (esso emette radiazione infrarossa come un corpo grigio $\epsilon \sigma T_A^4$ ed assorbe parte dell'infrarosso terrestre (circa il 80%, quindi $\epsilon \approx 0.8$) lasciando passare la frazione rimanente $(1-\epsilon) \sigma T_s^4$).

C) Temperatura di emissione della Terra considerando l'atmosfera come corpo grigio

La figura precedente va modificata nel seguente modo: indicando con I_a la radiazione entrante nel sistema, cioè quella assorbita, con I_s la radiazione di corpo nero della Terra, e con I_A la radiazione dell'atmosfera si ha (nella figura indicata con il pedice 1):



Scriviamo allora il bilancio per lo strato dell'atmosfera:

$$2\varepsilon\sigma T_A^4 + (1-\varepsilon)\sigma T_s^4 = \sigma T_s^4 \Rightarrow 2\varepsilon\sigma T_A^4 = \varepsilon\sigma T_s^4$$

ed il bilancio per la superficie terrestre

$$I_a + \varepsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Risolviendo il sistema si ha

$$2\varepsilon\sigma T_A^4 = \varepsilon\sigma T_s^4$$

$$I_a + \varepsilon\sigma T_A^4 = \sigma T_s^4$$

Si ha

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2I_a}{\sigma(2-\varepsilon)}}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{I_a}{\sigma(2-\varepsilon)}}$$

Da cui si vede che per $\varepsilon = 1$ si ricade nel caso precedente, siccome $\varepsilon < 1$ ora la T_s sarà minore.

Utilizzando il valore dell'emissività come valutato dall'IPCC (vedi N.B.) pari a 0.6 si ha

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8}(2-0.6)}} = 296 \text{ K} = 23^\circ\text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8}(2-0.6)}} = 234 \text{ K} = -38^\circ\text{C}$$

Per ottenere il valore corretto della temperatura terrestre occorre usare il valore 0.77 per l'emissività:

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 240}{5.67 \cdot 10^{-8} (2 - 0.77)}} = 288 \text{ K} = 15^\circ \text{C}$$

$$T_A = \sqrt[4]{\frac{240}{5.67 \cdot 10^{-8} (2 - 0.77)}} = 242 \text{ K} = -31^\circ \text{C}$$

Rispetto alla trattazione precedente la temperatura della superficie risulta correttamente più bassa, passando dai 30 °C a 15 °C a seguito dell'introduzione dell'emissività, con valore di $\varepsilon = 0.77$.

La T_s è diminuita del fattore $[1/(2 - \varepsilon)]^{1/4}$ rispetto al caso precedente in cui l'atmosfera era considerata con $\varepsilon = 1$.

Considerazione finale.

Riguardo ai calcoli fatti, si tenga presente che il modello utilizzato non è ancora ad un livello tale di raffinatezza tale da restituire il valore corretto della temperatura terrestre. E' un esempio semplice ed idealizzato che serve solo a far capire come ci si può progressivamente avvicinare alla descrizione della realtà, a partire dal primo modello grezzo, attraverso ipotesi via via più realistiche. Ad esempio, per la radiazione solare entrante di fatto si considera solo l'albedo del pianeta e nessuna interazione in atmosfera mentre in realtà non è così semplice. La fisica dell'atmosfera è molto complessa, interagiscono fra loro diversi componenti e non tutto è chiaro e definito fin nei dettagli.

Nota: l'emissività dell'atmosfera, come quella di qualsiasi altro materiale, può variare in base a diversi fattori. L'emissività è una misura della capacità di un materiale di emettere radiazione termica, ed è solitamente espressa come un valore compreso tra 0 e 1, dove 0 rappresenta un materiale che riflette tutta la radiazione termica incidente (è un ottimo riflettore), e 1 rappresenta un materiale che emette tutta la radiazione termica incidente (corpo nero).

N.B. L'IPCC riporta un flusso di radiazione termica in uscita (OLR) di $I_{uscita} = 239$ (237-242) W/m^2 , in cui i valori indicate in parentesi indicano gli intervalli di confidenza al 95%, a partire dal 2015, ed un SRL (radiazione in entrata) $I_{entrata} = 398 \text{ W/m}^2$. Questi valori indicano che l'atmosfera (con le nuvole incluse) riduce l'emissività complessiva della Terra, rispetto alle sue emissioni superficiali, di

un fattore di $\frac{I_{uscita}}{I_{entrata}} = \frac{239}{398} = 0.6$. In altre parole, le emissioni nello spazio sono date da

$$I_{uscita} = \epsilon_{eff} \sigma T^4 \text{ dove}$$

$$\epsilon_{eff} \approx 0.6$$

è l'emissività effettiva della Terra vista dallo spazio

e $T_s \equiv (I_{entrata}/\sigma)^{1/4} \approx 289 \text{ K}$ (16 °C) è la temperatura effettiva della superficie.

Curiosità: l'inversione termica

Si parla di inversione termica quando la temperatura dell'aria aumenta salendo di quota per alcune centinaia di metri, invece di diminuire.

L'inversione termica al suolo è un fenomeno temporaneo dovuto al fatto che la roccia di notte si raffredda molto rapidamente e conseguentemente gli strati a contatto con il suolo risultano più freddi di quelli sovrastanti. Al sorgere del sole il fenomeno scompare. Il fenomeno è più frequente in inverno quando le notti sono lunghe e fredde. Fenomeno analogo si ha nelle zone montuose, quando il sole al mattino riscalda prima le zone elevate, mentre nelle vallate profonde si conservano il freddo e l'umidità notturna.

L'inversione termica in quota è più duratura e si verifica quando una massa d'aria scende e si riscalda per compressione: se non si rimescola con quella più fredda presente al suolo, troviamo una temperatura inferiore in basso rispetto agli strati più alti. Se l'aria al suolo è carica di umidità si formano le nebbie come quelle invernali tipiche della Pianura Padana dove, nelle grandi città, le goccioline si mescolano ai fumi e alle polveri formando lo smog, che rimane imprigionato dalla cappa di aria calda sovrastante impedendone il rimescolamento.

Il Bilancio Energetico del Corpo Umano

Analisi quantitativa del Metabolismo e della Termoregolazione

A cura di Giancarlo Buccella



Indice

1. Introduzione
 2. Principi Fondamentali
 3. Metabolismo Basale e Totale
 4. Apporti Energetici
 5. Dispendio Energetico
 6. Termoregolazione
 7. Bilancio Energetico e Peso Corporeo
 8. Fattori che Influenzano il Bilancio
 9. Conclusioni
-

Introduzione

Il corpo umano è un sistema complesso che, come ogni macchina, ha bisogno di energia per funzionare. Questa energia proviene principalmente dal cibo che ingeriamo e viene spesa attraverso una serie di processi fisiologici e attività quotidiane. Comprendere il bilancio energetico è fondamentale per mantenere uno stato di salute ottimale e prevenire malattie legate a squilibri energetici, come obesità o malnutrizione.

Il bilancio energetico del corpo umano è la differenza tra l'energia introdotta con l'alimentazione e l'energia consumata dal corpo. Un bilancio positivo (più calorie introdotte che consumate) porta ad un aumento di peso, mentre un bilancio negativo (più calorie consumate che introdotte) porta alla perdita di peso. Un bilancio energetico equilibrato, invece, permette il mantenimento del peso corporeo.

Il bilancio energetico del corpo umano rappresenta uno dei principi fondamentali della fisiologia umana e costituisce la base per comprendere i meccanismi che regolano il peso corporeo, la performance fisica e la salute metabolica. Questo equilibrio dinamico tra energia introdotta e energia consumata determina se un individuo mantiene, aumenta o diminuisce il proprio peso corporeo.

Il corpo umano può essere considerato come un sistema termodinamico aperto, ossia che scambia continuamente energia e materia con l'ambiente circostante. L'energia viene introdotta attraverso gli alimenti e viene utilizzata per mantenere le funzioni vitali, sostenere l'attività fisica e regolare la temperatura corporea.

La comprensione quantitativa di questi processi è essenziale non solo dal punto di vista teorico, ma anche per applicazioni pratiche in ambito clinico, sportivo e nutrizionale. La capacità di calcolare con precisione il fabbisogno energetico individuale e di predire le variazioni del peso corporeo in risposta a modifiche dell'apporto calorico o dell'attività fisica rappresenta uno strumento fondamentale per la gestione della salute e della performance.

Il corpo umano è un sistema complesso che, come ogni macchina, ha bisogno di energia per funzionare. Questa energia proviene principalmente dal cibo che ingeriamo e viene spesa attraverso una serie di processi fisiologici e attività quotidiane. Comprendere il bilancio energetico è fondamentale per mantenere uno stato di salute ottimale e prevenire malattie legate a squilibri energetici, come obesità o malnutrizione.

L'energia è necessaria non solo quando una persona è fisicamente attiva, ma anche quando il corpo è sdraiato immobile. A seconda del livello di attività fisica di un individuo, tra il 50 e l'80% dell'energia spesa ogni giorno è dedicata ai processi metabolici di base (metabolismo basale), che consentono al corpo di mantenersi caldo, respirare, pompare sangue e svolgere numerose attività fisiologiche e biosintetiche, tra cui la sintesi di nuovi tessuti nei bambini in crescita e nelle donne in gravidanza e allattamento. Anche la digestione e la successiva elaborazione del cibo da parte dell'organismo consumano energia e producono calore. Questo fenomeno, noto come effetto termico del cibo (o termogenesi indotta dalla dieta), rappresenta circa il 10% del dispendio energetico giornaliero, variando leggermente a seconda della composizione della dieta e delle abitudini alimentari precedenti. Infine, la componente più variabile del dispendio energetico è l'attività fisica, che include esercizio fisico e altre attività volontarie, nonché attività involontarie come agitarsi, tremare e mantenere la postura. L'attività fisica rappresenta dal 20 al 40% del dispendio energetico totale, una percentuale ancora inferiore in una persona molto sedentaria e maggiore in una persona estremamente attiva.

Principi Fondamentali

Prima Legge della Termodinamica

Il bilancio energetico del corpo umano è governato dalla prima legge della termodinamica, che stabilisce il principio di conservazione dell'energia, esso afferma che l'energia non può essere creata né distrutta, ma solo trasformata da una forma all'altra o trasferita da un sistema all'altro, applicata al corpo umano, questa legge può essere espressa come:

$$\Delta U = E_{in} - E_{out} \quad (1)$$

Dove:

- ΔU = variazione dell'energia interna
- E_{in} = energia introdotta (alimentazione)
- E_{out} = energia ceduta all'ambiente (sotto forma di calore e lavoro)

Questa considerazione discende dal considerare la seguente relazione, che fonda il primo principio, che nella sua forma standard è la seguente:

$$\Delta U = Q - L \quad (2)$$

dove ΔU è la variazione di energia interna del sistema (U è la somma dell'energia cinetica e potenziale di tutte le particelle del sistema), i valori di Q ed L possono essere sia positivi che negativi; secondo la convenzione dei segni Q negativo se ceduto, positivo se assorbito e viceversa per L .

Q è il calore scambiato (assorbito o ceduto) con l'ambiente esterno

L è il lavoro meccanico scambiato (assorbito o ceduto) con l'ambiente esterno

Quindi Q ed L vanno inseriti nella (2) con il loro segno.

Se consideriamo l'intero universo, esso è un sistema chiuso, in quanto proprio per definizione di universo non esiste un ambiente esterno ad esso, quindi il secondo membro sarà nullo: $\Delta U = 0$ e questo significa che ci sarà nessuna variazione dell'energia interna del sistema, ossia il suo contenuto energetico rimane costante; ecco quindi da dove nasce l'affermazione che nulla si crea e nulla si distrugge ma tutto si trasforma.

Per un organismo in equilibrio $\Delta U = 0$, esso mantiene il proprio peso costante e non ci sarà diminuzione o aumento di energia interna. Siccome la vita dell'organismo ha bisogno di un continuo apporto di energia vi dovrà essere un qualche meccanismo interno al corpo tale da rifornire continuamente “le perdite energetiche”, tale meccanismo è il metabolismo, ossia quel processo che “trasforma” il cibo ingerito in energia. La relazione (2) è la formulazione classica del primo principio della termodinamica, esso descrive un sistema che scambia solo lavoro e calore con l'ambiente, ma

nel nostro caso il corpo riceve energia dall'ambiente (dall'assunzione di cibo), per tener conto di questo termine la relazione diventa:

$$\Delta U = E_{in} + Q - L \quad (3)$$

Questa relazione è la formulazione del Primo principio della termodinamica esteso ai sistemi aperti, in cui cioè avviene un "rifornimento" di energia dall'esterno.

Se poniamo:

Energia in entrata = E_{in} = energia chimica contenuta nei cibi + calore assorbito + lavoro assorbito

Energia in uscita = E_{out} = calore ceduto + lavoro fatto sull'ambiente

Allora la (3) diventa

$$\Delta U = E_{in} + E_{out}$$

Ritrovando la (1).

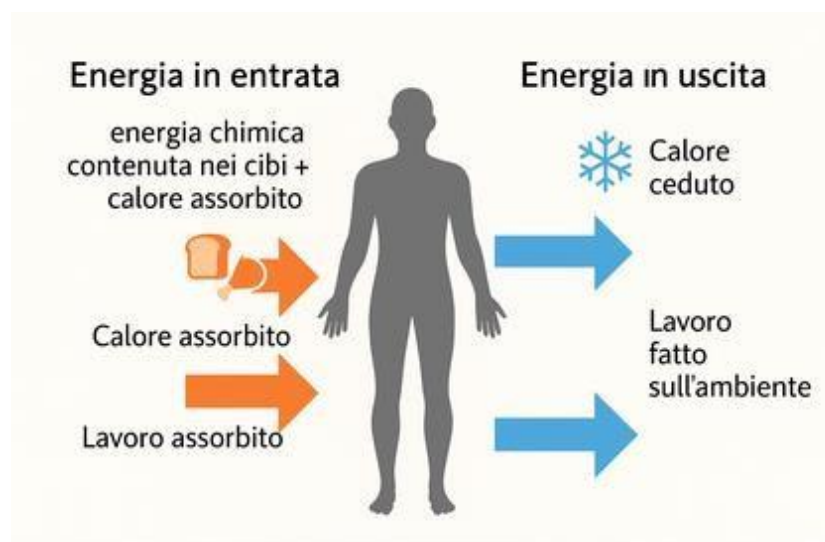
Calore assorbito: quando la temperatura del corpo è inferiore a quella dell'ambiente, ad esempio quando se si è in una sauna o semplicemente esposti al sole o sotto una lampada solare...

Lavoro assorbito: massaggio meccanico (è una macchina agisce sul corpo, comprimendo e rilasciando muscoli), terapia ad ultrasuoni è energia meccanica oscillante trasferita ai tessuti...

Calore ceduto: quando la temperatura del corpo è superiore a quello dell'ambiente, ad esempio quando si è accaldati, (esercizio fisico, esposizione a fonti di calore) il corpo sudando cede calore all'ambiente, quando si è all'aperto in inverno...

Lavoro ceduto: quando si fa ad esempio un lavoro meccanico contro la gravità (sollevare pesi), camminare, correre, parlare, scrivere...

Graficamente



Quando si dice che "l'energia in entrata deve uguagliare quella in uscita", si sta implicitamente assumendo che sia $\Delta U = 0$, cioè che non ci sia variazione dell'energia interna del corpo.

Per quanto concerne il lavoro assorbito che rappresenta l'energia meccanica ricevuta dall'esterno (se una persona viene spinta o sollevata da una forza esterna, sta ricevendo lavoro, ad esempio, essere trasportati passivamente su una sedia a rotelle o essere sollevati da un'altra persona o da un macchinario sono esempi di lavoro compiuto sul corpo), esso non viene immagazzinato come energia interna a meno di casi molto particolari, (come ad esempio essere sottoposti ad una fonte sonora molto intensa, infatti le onde sonore esercitano una pressione sul corpo trasferendo così energia, o anche durante un massaggio, in tal caso ai muscoli viene applicata una forza trasferendo così lavoro), e comunque anche in questi casi marginali l'entità di energia trasferita è veramente minimale per cui è del tutto lecito trascurare il lavoro assorbito.

Rispetto invece al calore assorbito possiamo affermare che è anch'esso trascurabile, infatti in ambienti normali, la temperatura esterna è uguale o inferiore a quella corporea, quindi il corpo cede calore (non lo assorbe). Solo in ambienti molto caldi (es. sauna, deserto) il corpo può assorbire un po' di calore che in genere viene dissipato immediatamente.

Conclusione: in condizioni normali, sia il lavoro che il calore assorbito sono del tutto trascurabili.

[N.B. Si potrebbe pensare che la temperatura esterna ottimale fosse quella corporea di 37 °C, infatti fra due corpi alla stessa temperatura non vi è transito di calore e quindi sembrerebbe la situazione ideale di equilibrio termico. Ma non è così a causa del fatto che la sensazione di caldo non dipende solo dalla temperatura assoluta dell'ambiente, ma dal fatto che la capacità del corpo di dissipare calore diminuisce man mano che la temperatura esterna si avvicina ai 37 °C. A 30–32 °C: l'aria è già molto vicina alla temperatura del corpo. L'irraggiamento e la convezione non bastano più. Il corpo attiva la sudorazione come principale strategia di raffreddamento. Se l'umidità è alta, il sudore non evapora facilmente ci sentiamo ancora più accaldati. A 37 °C (o oltre): non solo non perdiamo più calore all'ambiente, ma potremmo assorbirne. Il corpo è costretto a sudare continuamente. In mancanza di evaporazione efficace, si rischia ipertermia.]

Riprendendo la relazione (3) e considerando che come abbiamo detto il calore e lavoro saranno essenzialmente quelli ceduti all'ambiente, in base alla convezione sui segni, L sarà positivo e Q negativo, per cui avremo

$$\Delta U = E_{in} - Q - L = E_{in} - (Q + L) = E_{in} - E_{out}$$

Q ed L al secondo membro sono entrambi negativi e pertanto essi rappresentano l'energia in uscita. Se ad esempio $(Q + L) > E_{in}$ l'energia interna deve diminuire ($\Delta U < 0$) e viceversa.

Equazione del Bilancio Energetico

Il sistema termodinamico “corpo umano” produce calore e lavoro attraverso la sua attività metabolica (metabolismo base + energia per la digestione) e il suo movimento muscolare (attività fisica). Con queste premesse è possibile scrivere l'equazione fondamentale del bilancio energetico che, nel caso di pareggio fra energia in entrata ed energia in uscita, è:

$$E_{in} = E_{out} \equiv BMR + TEF + A \quad (4)$$

- E_{in} = energia introdotta con il cibo (kcal/giorno)
- BMR = metabolismo basale (Basal Metabolic Rate)
- TEF = effetto termico degli alimenti (Thermic Effect of Food) cioè l'energia spesa per la digestione
- A = attività fisica volontaria e involontaria

Se il bilancio non è a pareggio, indicando con ΔS il “disavanzo”, la (4) diventa:

$$\Delta S = E_{in} - E_{out} = E_{in} - (BMR + TEF + A) \quad (5)$$

A parole: l'energia che entra nell'organismo meno l'energia spesa è uguale al disavanzo, che può essere positivo (aumento di peso), negativo (perdita di peso) o nullo (situazione stazionaria).

Il termine riguardante l'attività motoria (A) viene diviso in due contributi:

- TEA: attività fisica programmata (Thermic Effect of Activity)
- NEAT: termogenesi non associata all'attività fisica programmata (Non-Exercise Activity Thermogenesis)

Allora possiamo riscrivere la (1) esplicitando la A nelle sue due componenti, avendosi:

$$E_{in} = BMR + TEF + TEA + NEAT \quad (6)$$

Ma come raccordare questa relazione con la (3)? Basta considerare che BMR e TEF sono attività che non producono lavoro meccanico, pertanto tutta l'energia consumata dal BMR + TEF deve essere convertita in qualcos'altro, questo qualcos'altro è il calore, Il BMR è la principale fonte di calore che ci permette di mantenere la nostra temperatura corporea costante intorno ai 37°C.

Soffermiamoci un attimo su questo aspetto.

Il BMR rappresenta l'energia spesa per compiere un'enorme quantità di "lavoro" che però rimane confinato all'interno del nostro corpo. Questo include:

Sintesi di molecole: Costruire nuove proteine, ormoni, neurotrasmettitori, enzimi, ecc.

Trasporto attivo: Le famose pompe ioniche (come la pompa sodio-potassio) che consumano ATP per mantenere i gradienti elettrici e chimici attraverso le membrane cellulari, fondamentali per la funzione nervosa e muscolare.

Attività elettrica: L'attività incessante del cervello e del sistema nervoso.

Replificazione e riparazione cellulare: La continua sostituzione di cellule vecchie.

Contrazione dei muscoli involontari: Il cuore che pompa sangue, il diaframma per la respirazione.

Tutte queste sono attività vitali ed energeticamente dispendiose. Dal punto di vista della termodinamica, che guarda al sistema "corpo" nel suo insieme e ai suoi scambi con l'esterno, tutto questo lavoro interno, alla fine, si degrada in calore all'interno del corpo stesso. Perché?

Inefficienza dei Processi: nessuna conversione di energia è efficiente al 100%. Quando l'ATP viene usato per alimentare la pompa sodio-potassio, una parte dell'energia compie il "lavoro" di spostare gli ioni, ma un'altra parte viene immediatamente persa come calore a causa dell'inefficienza del processo chimico.

Lavoro a circuito chiuso: si pensi al cuore. Esso compie un lavoro meccanico pompando il sangue. Ma questo lavoro è interno al sistema. L'energia cinetica data al sangue viene poi dissipata in calore a causa dell'attrito del sangue contro le pareti dei vasi. Il cuore non sta compiendo un lavoro sull'ambiente esterno. L'effetto netto, per l'intero organismo, è il consumo di energia chimica (dagli alimenti) e la produzione di calore.

Analogia della fabbrica: si può pensare al corpo come a una fabbrica sigillata. L'energia elettrica (cibo) entra. Questa energia alimenta i macchinari (lavoro biologico interno) che assemblano prodotti. Tuttavia, ogni motore, ogni computer, ogni luce in quella fabbrica, mentre funziona, produce calore. Se ci si mette fuori dalla fabbrica e si misura l'energia che esce, non si vedrà uscire "lavoro", ma solo calore dissipato dalle pareti. L'energia è stata usata per scopi vitali all'interno, ma il suo sottoprodotto finale, misurabile dall'esterno, è il calore.

Il BMR rappresenta l'energia utilizzata per compiere tutto il lavoro biologico interno necessario a mantenerci in vita. A causa delle leggi della termodinamica, il risultato netto di tutta questa attività interna è la continua produzione di calore.

Per quanto riguarda l'attività muscolare occorre precisare che esso è un processo inefficiente in quanto produce solo il 20 % di lavoro meccanico, il restante 80% viene disperso sotto forma dell'unico altro modo di trasferire energia, cioè di calore.

Quindi la (3) diventa (considerando il caso in cui il calore venga ceduto all'ambiente)

$$\Delta U = E_{in} - [L (20\% A) + Q (BMR+TEF+80\% A)] \quad (7)$$

Il calore Q, come vedremo, verrà ceduto all'ambiente tramite diversi processi di scambio.

Unità di Misura

L'energia, nei processi in cui interviene il calore, viene comunemente misurata in:

Caloria (cal): quantità di energia necessaria per innalzare di 1°C la temperatura di 1 g d'acqua distillata da 14,5 °C a 15,5 °C, alla pressione atmosferica normale (detta in passato "piccola caloria" (cal) per distinguerla dalla "grande caloria" (Cal), pari a 1 kcal);

$$1\text{Cal} = 1000 \text{ cal} = 1 \text{ kcal}$$

In fisica, l'energia si misura in joule. Tuttavia, in passato, quando si iniziò a studiare i fenomeni termici, il legame tra calore ed energia non era ancora noto. Per questo motivo, fu creata un'unità di misura specifica per il calore: la caloria. Oggi si preferisce in genere esprimere sempre l'energia in joule.

"Conversione (caloria – joule): $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$

Energia introdotta (E_{in})

L'energia introdotta nell'organismo è quella contenuta nei legami chimici dei nutrienti.

Il nostro corpo non "brucia" il cibo come farebbe un fuoco. Utilizza un processo molto più controllato e efficiente chiamato metabolismo, in particolare attraverso le reazioni di catabolismo.

Il processo chiave è la respirazione cellulare. Funziona così:

1. Rottura dei Legami: Attraverso una serie di reazioni chimiche complesse (come la glicolisi e il ciclo di Krebs), l'organismo smonta le molecole di cibo (es. glucosio) pezzo per pezzo, rompendo i loro legami chimici.
2. Rilascio di Energia: La rottura di questi legami ad alta energia rilascia l'energia che contenevano.
3. Cattura e Trasferimento: Questa energia non viene usata direttamente. Sarebbe inefficiente e dispersiva. Viene invece catturata e utilizzata per "caricare" una molecola speciale, la "moneta energetica" della cellula: l'ATP (Adenosina Trifosfato). L'energia viene usata per aggiungere un gruppo fosfato all'ADP (Adenosina Difosfato), trasformandolo in ATP.

I macronutrienti forniscono energia secondo questi valori, espressi sia in termini di calorie che di joule

Macronutriente	Energia (kcal/g)	Energia (kJ/g)
Carboidrati	4,0	16,7
Proteine	4,0	16,7
Grassi	9,0	37,7
Alcol	7,0	29,3

Il calcolo dell'apporto energetico totale si basa sulla composizione della dieta, spesso viene utilizzata la seguente formula empirica:

Energia totale = (grammi di carboidrati \times 4) + (grammi di proteine \times 4) + (grammi di grassi \times 9) + (grammi di alcol \times 7)

Per una dieta contenente ad esempio: 250g di carboidrati, 100 g di proteine, 80 g di grassi e 20g di alcol si ha

Energia totale = $(250 \times 4) + (100 \times 4) + (80 \times 9) + (20 \times 7) = 1000 + 400 + 720 + 140 = 2260 \text{ kcal}$

Ma non tutta l'energia contenuta negli alimenti è disponibile per il metabolismo:

Fattore	Perdita Energetica	%
Digestione incompleta	Feci	5-10%
Perdite urinarie	Urea, creatinina	2-3%
Fermentazione intestinale	Gas intestinali	1-2%

Quindi effettivamente l'energia metabolizzabile oscilla fra l'85- 92%

Il termine E_{in} , quindi (supponendo, come normalmente accade, che il calore e lavoro assorbiti siano del tutto trascurabili) si può calcolare in maniera approssimativa facendo il 90% dell'energia contenuta nei cibi che vengono assunti.

Metabolismo Basale (BMR)

Il metabolismo rappresenta l'insieme delle reazioni biochimiche che avvengono nell'organismo per mantenere la vita, esso è l'insieme di tutte le reazioni chimiche che avvengono nelle cellule di un organismo, e si divide in due processi principali: catabolismo e anabolismo. Il catabolismo è la fase di scomposizione delle molecole complesse in molecole più semplici, con rilascio di energia. L'anabolismo è il processo opposto, in cui l'energia viene utilizzata per costruire molecole complesse a partire da molecole più semplici.

Il metabolismo basale rappresenta la quantità minima di energia necessaria per mantenere le funzioni vitali in condizioni di riposo completo. Rappresenta circa il 60-70% del dispendio energetico totale in individui sedentari. Si misura da svegli, in posizione supina, a digiuno da almeno 12 ore, a riposo fisico e mentale, e in un ambiente con temperatura neutra (22 – 26°C).

Il tasso metabolico M, ossia la velocità con cui il corpo utilizza l'energia introdotta, che si misura in watt (energia/tempo), non può essere misurato facilmente, esso viene determinato principalmente tramite la calorimetria indiretta, che si basa sul principio che tutto il metabolismo energetico dipende dal consumo di ossigeno (O_2) e dalla produzione di anidride carbonica (CO_2).

La formula più utilizzata è l'equazione di Weir:

$$M \text{ (in kcal/min)} = 3.941 \cdot V_1(O_2) + 1.106 \cdot V_2(CO_2)$$

dove:

$V_1(O_2)$ è il volume di ossigeno consumato in litri al minuto (L/min).

$V_2(CO_2)$ è il volume di anidride carbonica prodotta in litri al minuto (L/min).

Considerando ad esempio un uomo adulto di 70 kg che sia a riposo (condizioni basali). I valori tipici di scambio gassoso sono:

$$V_1(O_2) \approx 0.25 \text{ L/min}$$

$$V_2(\text{CO}_2) \approx 0.21 \text{ L/min}$$

Applicando l'equazione di Weir si ha:

$$M = (3.941 \cdot 0.25) + (1.106 \cdot 0.21) = 0.985 + 0.232 = 1.217 \text{ kcal/min}$$

Poco più di una chilocaloria al minuto.

Per conoscere il valore giornaliero occorre moltiplicare per i minuti presenti in 24 ore, ossia 1440, avendosi

$$M = 1750 \text{ kcal/giorno}$$

Possiamo convertire in watt questo risultato, ricordando che la potenza è l'energia scambiata nell'unità di tempo ($1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$, $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$), si ha:

$$M \approx 85 \text{ W}$$

Questo è l'ordine di grandezza della potenza sviluppata dal nostro corpo per il suo Metabolismo Basale. Ovviamente quando il corpo non è a riposo il suo valore aumenta.

Per una persona sveglia e seduta, a causa del tono muscolare e di piccole attività, il valore è leggermente più alto di quello basale:

$$M \approx 100 \text{ W}$$

Il metabolismo basale, in alternativa al metodo diretto, può essere stimato attraverso diverse formule empiriche. Una delle più utilizzate è la formula di Harris-Benedict (il cui risultato è il kcal):

$$\text{Per gli uomini: } \text{BMR} = 88,36 + (13,4 \cdot \text{peso}) + (4,8 \cdot \text{altezza}) - (5,7 \cdot \text{età})$$

$$\text{Per le donne: } \text{BMR} = 447,6 + (9,2 \cdot \text{peso}) + (3,1 \cdot \text{altezza}) - (4,3 \cdot \text{età})$$

Esempio numerico:

Un uomo di 30 anni, 75 kg di peso e 180 cm di altezza:

$$\text{BMR} = 88,36 + (13,4 \cdot 75) + (4,8 \cdot 180) - (5,7 \cdot 30) = 88,36 + 1005 + 864 - 171 = 1786 \text{ kcal}$$

Il BMR è distribuito tra i diversi organi e tessuti:

Organo/Tessuto	Perc. del BMR	kcal/kg tessuto/giorno
Fegato	21%	200
Cervello	20%	240
Cuore	9%	440
Reni	8%	440
Muscolo scheletrico	22%	13
Tessuto adiposo	4%	4,5
Altri tessuti	16%	

Fattori che influenzano il Metabolismo Basale

Età

Il metabolismo basale diminuisce con l'età: $\Delta\text{BMR} = -1$ a -2% per decade dopo i 30 anni

Sesso

Le differenze di genere nel metabolismo:

- Uomini: BMR mediamente 10-15% superiore
- Differenze nella composizione corporea
- Effetti ormonali (testosterone vs estrogeni)

Composizione Corporea

$$\text{BMR} = 21,6 \cdot \text{FFM (kg)} + 370$$

Dove FFM è la massa magra in kg.

Genetica

La variabilità genetica del metabolismo:

- Variazione inter-individuale: ± 200 -300 kcal/giorno
- Polimorfismi genetici influenzano:
 - Proteine disaccoppianti (UCP)
 - Recettori β -adrenergici
 - Ormoni tiroidei

Temperatura Ambientale

Zona di Termoneutralità: 22-27 °C (per un corpo vestito in modo leggero)

Al di fuori di questa zona:

- Freddo: +10-15% del BMR per ogni 10°C sotto 18°C
- Caldo: +5-10% del BMR per ogni 10°C sopra 25°C

Altitudine

Effetti dell'ipossia:

- Aumento del BMR del 5-10% sopra i 3000m
- Aumento della ventilazione
- Modifiche nella composizione corporea

Stato Nutrizionale

- Digiuno: -20-30% del BMR in 72 ore
- Restrizione calorica: -15-20% del BMR in 6 mesi

- Overfeeding: +10-15% del BMR

Fattori Patologici

Disturbi Tiroidei

- Ipertiroidismo: +20-30% del BMR
- Ipotiroidismo: -20-30% del BMR

Febbre

Aumento del BMR = 13% per ogni grado di febbre

Malattie Croniche

- Cancro: +10-20% del BMR
- Insufficienza cardiaca: +15-25% del BMR
- Malattie respiratorie: +10-15% del BMR

Effetto termico degli alimenti (TEF)

L'effetto termico del cibo (TEF, dall'inglese "Thermic Effect of Food") rappresenta l'energia che il corpo utilizza per digerire, assorbire, trasportare e metabolizzare i nutrienti contenuti negli alimenti. Questo processo avviene in seguito ai pasti ed è una componente fondamentale del dispendio energetico giornaliero.

Esso varia, ovviamente, in base alla composizione del pasto.

Nutriente	Percentuale dell'energia utilizzata per la digestione per tipo di nutriente
Proteine	20-30%
Carboidrati	5-10%
Grassi	0-3%
Alcol	10-15%

Ad esempio, se si assumono 100 kcal da proteine, circa 20-30 kcal saranno spese solo per digerirle e metabolizzarle. Questo rende gli alimenti ricchi in proteine leggermente più "costosi" da un punto di vista energetico.

Questo termine viene stimato intorno al 10 % dell'energia introdotta (E_{in}).

Attività fisica programmata (TEA)

Questo termine include tutte le attività fisiche strutturate e volontarie, come ad esempio fare attività sportiva.

Il dispendio energetico per attività fisica può essere calcolato usando il parametro MET (Metabolic Equivalent of Task), secondo la seguente formula empirica:

$$\text{Dispendio (kcal)} = [\text{MET} \cdot 3,5 \cdot \text{peso (kg)} / 200] \cdot \text{tempo (min)}$$

Attività	MET	Esempio
Riposo	1,0	Dormire
Leggero	1,5-3,0	Camminare lentamente
Moderato	3,0-6,0	Camminare velocemente
Vigorouso	6,0-9,0	Correre
Molto vigoroso	> 9,0	Correre velocemente

Esempio di calcolo del dispendio energetico dell'attività fisica volontaria.

Per un uomo di 75 kg che corre per 30 minuti a 10 km/h (MET = 9,8):

$$\text{Dispendio energetico (TEA)} = [9,8 \cdot 3,5 \cdot 75 / 200] \cdot 30 = 386 \text{ kcal}$$

Termogenesi non associata all'esercizio fisico (NEAT)

Questo parametro include tutte le attività non sportive, quali ad esempio il mantenimento della postura, fare lavori domestici, gesticolare mentre si parla, svolgere le attività lavorative a basso dispendio energetico.

Il NEAT può rappresentare dal 6% fino al 50% del dispendio energetico totale, a seconda dello stile di vita dell'individuo. Negli individui molto sedentari, il NEAT sarà minimo, mentre in soggetti con lavori fisicamente attivi o semplicemente più dinamici durante la giornata, può superare la TEA.

Esempio comparativo: due persone con lo stesso BMR e stessa alimentazione:

- Persona sedentaria (NEAT basso): dispendio giornaliero totale = 2200 kcal
- Persona attiva durante il lavoro (NEAT alto): dispendio giornaliero totale = 2700 kcal

Una differenza di 500 kcal al giorno può comportare un impatto significativo sul peso corporeo nel lungo termine (oltre 1 kg al mese).

Strategie per aumentare il NEAT: camminare mentre si parla al telefono, fare pause attive durante il lavoro sedentario, usare le scale invece dell'ascensore, fare brevi camminate dopo i pasti.

Il NEAT è quindi una leva molto efficace per migliorare il bilancio energetico senza necessariamente dedicare tempo a sessioni di allenamento strutturate.

Possiamo riassumere quanto detto finora osservando che il dispendio energetico totale giornaliero (TDEE) può essere suddiviso in quattro componenti principali (trascurando per ora la termoregolazione in quanto nel modello che stiamo utilizzando esso è inglobato nel metabolismo basale in quanto esso viene calcolato a temperatura ambiente "standard" (circa 22-25 °C), in condizioni neutre.

1. Metabolismo Basale (BMR) - 60-70%

Rappresenta l'energia necessaria per mantenere le funzioni vitali basilari:

- Respirazione cellulare
- Circolazione sanguigna
- Funzione renale
- Sintesi proteica
- Mantenimento del potenziale di membrana

2. Effetto Termico degli Alimenti (TEF) - 8-12%

L'energia spesa per la digestione, assorbimento e metabolismo degli alimenti:

3. Attività Fisica da Esercizio Fisico (TEA) - 15-30%

Include tutte le attività fisiche strutturate e volontarie (come ad esempio lo sport).

4. Attività (termogenesi) non da Esercizio Fisico (NEAT) - 15-50%

Attività lavorative a basso dispendio energetico, lavori domestici, ecc...

La seguente figura riassume in modo sintetico quanto detto, avendo inglobato nel riquadro attività fisica sia quella volontaria che involontaria.



Se invece vogliamo avere un quadro più dettagliato occorrerà dividere il riquadro attività fisica nel seguente modo.



Quando siamo in un ambiente a temperatura confortevole, e il corpo non è sotto stress, non c'è bisogno di attivare sudorazione, brividi, ecc. in quanto il flusso di calore che entra è pari a quello che esce. Il metabolismo basale è sufficiente a mantenere la temperatura costante senza sforzo, quindi in condizioni normali non si ha spesa energetica aggiuntiva per la termoregolazione (termogenesi adattiva), ma nel caso in cui ci sia scambio di calore, (situazione in cui fa troppo caldo o freddo) occorre considerarla, ecco come si modifica l'illustrazione precedente.



Metabolismo Totale (MT)

In modo grossolano, il dispendio energetico totale giornaliero può essere stimato moltiplicando il BMR per un fattore di attività F:

$$\text{Metabolismo Totale} = \text{BMR} \cdot F$$

Livello di Attività	F	Descrizione
Sedentario	1,2	Nessuna attività fisica
Leggermente attivo	1,375	Esercizio leggero 1-3 giorni/settimana
Moderatamente attivo	1,55	Esercizio moderato 3-5 giorni/settimana
Molto attivo	1,725	Esercizio intenso 6-7 giorni/settimana
Estremamente attivo	1,9	Esercizio molto intenso, lavoro fisico

In particolare per quanto riguarda il cervello possiamo chiederoci quale sia il suo dispendio energetico. Il cervello rappresenta circa 2% del peso corporeo, ma consuma circa il 20% dell'energia totale a riposo, ossia del metabolismo basale.

In termini assoluti, consuma in media circa 300-400 kcal al giorno solo per funzionare "normalmente".

Il suo consumo energetico è continuo: anche quando dormiamo, il cervello resta attivo per funzioni come sogni, memoria, regolazione autonoma, ecc.

Ma pensare "intensamente" fa bruciare più calorie?

Sì, ma non quanto si potrebbe pensare. Anche durante attività mentali intense (esami, programmazione, scacchi, ecc.), l'aumento del consumo energetico è modesto rispetto ad attività fisiche. Alcuni studi mostrano che il consumo può aumentare di un 5-10%, quindi parliamo di qualche decina di kcal in più all'ora. Tuttavia, queste attività possono aumentare la sensazione di stanchezza mentale, anche senza un grosso dispendio calorico. In condizioni normali la "benzina" del cervello è il glucosio, mentre in caso di digiuno prolungato, entra in gioco anche l'utilizzo di corpi chetonici.

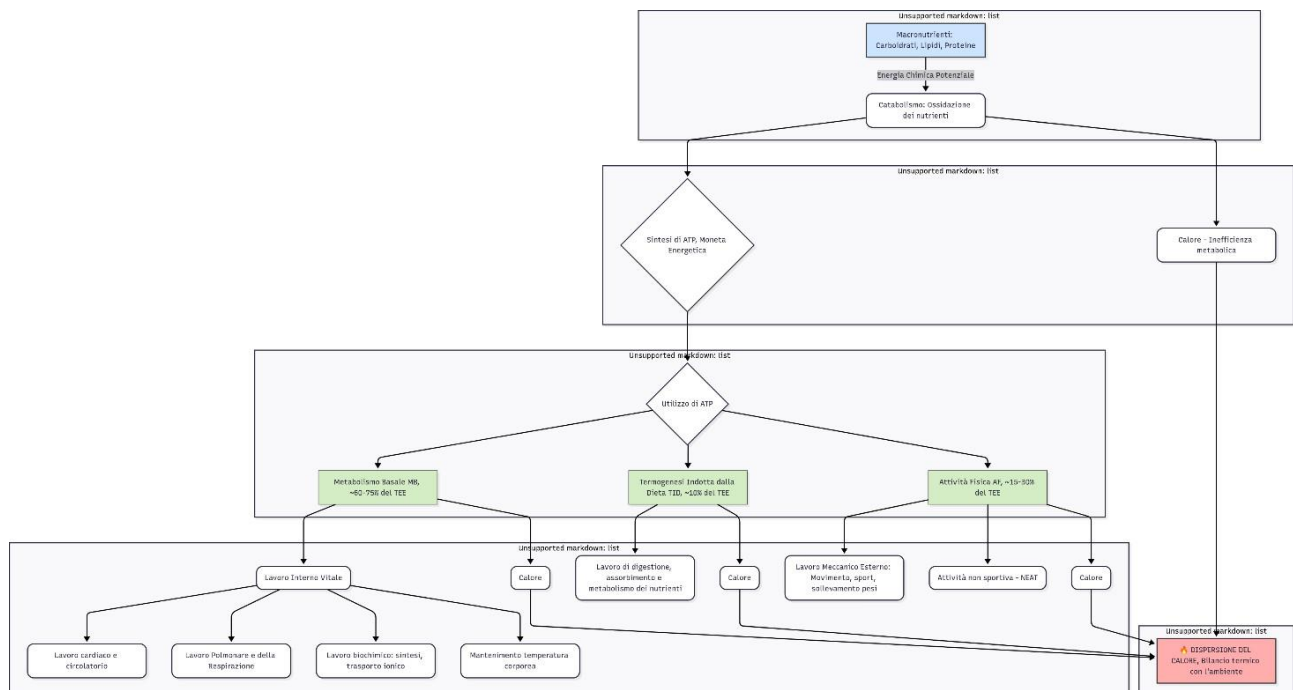
In sintesi

Stato cerebrale	Consumo energetico
Stato di veglia a riposo	~20% del metabolismo basale
Lavoro mentale intenso	+5-10% (modesto incremento)
Sonno	~15-20% meno che da svegli

Termoregolazione (Termogenesi adattiva)

Premessa

Prima di parlare della termoregolazione, è utile soffermarsi sulla seguente figura in cui viene illustrato il bilancio energetico del corpo umano, notando che il calore (riquadro colorato in basso a destra) si accumula come sottoprodotto di diversi processi: catabolismo, metabolismo basale, termogenesi degli alimenti e attività fisica.



Il primo passaggio del diagramma rappresenta l'ingresso dell'energia chimica nell'organismo umano, ed è indicato in alto nella casella blu:

(Carboidrati, Lipidi, Proteine, Alcol) → Energia chimica potenziale

Quando assumiamo cibo, introduciamo macronutrienti: carboidrati, grassi (lipidi), proteine e alcol. Questi nutrienti contengono energia chimica immagazzinata nei legami molecolari.

Energia chimica potenziale vuol dire che questa energia non è ancora utilizzata, ma è disponibile per essere trasformata in energia utilizzabile dal corpo, ad esempio sotto forma di ATP (adenosina trifosfato), la “moneta energetica” delle cellule. In breve: il corpo prende i macronutrienti, li “smonta” tramite reazioni, chimiche dette catabolismo, e ne ricava energia.

N. B. Il primo riquadro verde indicato come “Metabolismo” si intende il metabolismo in senso fisiologico, cioè l’insieme di processi energetici che servono a mantenere il corpo in vita, a riposo, in senso generale invece il metabolismo in senso generale viene definito come composto da due fasi: catabolismo (degradazione di molecole complesse) e anabolismo (costruzione di altre molecole complesse). Nella relazione (7) il termine metabolismo basale va inteso nella sua accezione generale di catabolismo e anabolismo.

Ad esempio, quasi tutte le reazioni metaboliche rilasciano calore:

La respirazione cellulare ($C_6H_{12}O_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + ATP + \text{calore}$)

Il ciclo di Krebs, la fosforilazione ossidativa, ecc.

Anche il semplice funzionamento degli organi interni (cuore, fegato, cervello) produce calore.

Anche digerire, assorbire e metabolizzare i nutrienti genera calore, in particolare:

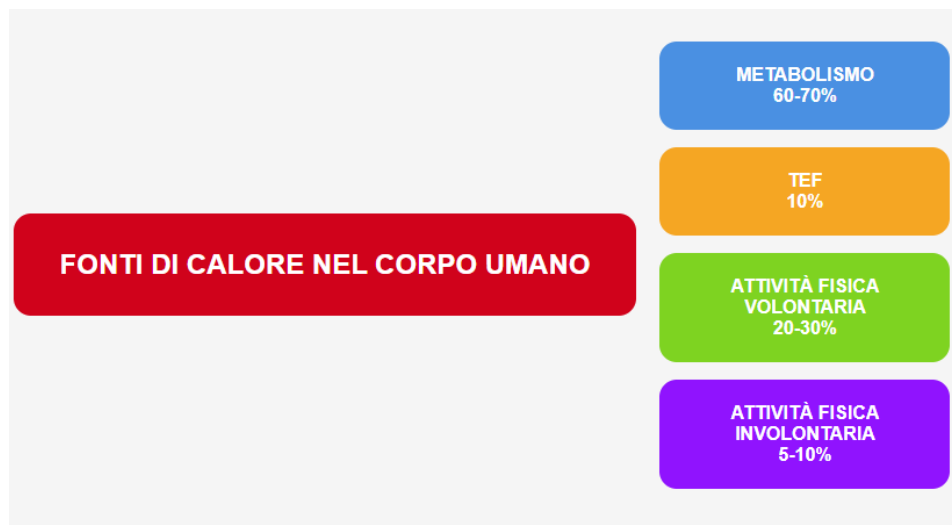
- Le proteine hanno il più alto TEF (fino al 30% dell'energia assunta!)
- I lipidi il più basso (~5-10%)

Nella relazione (7) che qui riportiamo

$$\Delta U = E_{in} - [L (20\% A) + Q (BMR + TEF + 80\% A)]$$

è specificato quali siano le fonti del calore che viene prodotto dal corpo umano, ossia metabolismo, digestione e attività fisica (in questa relazione il BMR è inteso nella sua accezione generale come catabolismo e anabolismo).

La seguente illustrazione riassume quanto detto (dove il termine metabolismo è nella sua accezione generale, invece del disegno di cui sopra veniva usato, come già detto, in senso più ristretto).



Scambio termico con l'ambiente (Q)

In condizioni ambientali normali, cioè a temperatura termoneutra (di solito tra i 22 e i 27 °C per un corpo vestito in modo leggero e in stato di riposo, invece di 28 – 30 °C per un corpo nudo), il contributo energetico della termoregolazione è praticamente nullo, ecco perché non lo abbiamo considerato quando abbiamo detto che il dispendio energetico totale è la somma di quattro contributi (BMR+TEF+TEA+NEAT).

La termoregolazione è quel processo sempre attivo che mantiene costante il valore della temperatura interna del corpo umano intorno ai 37 °C, mentre la nostra superficie esterna, la pelle, è circa 36 °C.

La termoregolazione è un meccanismo omeostatico controllato dall'ipotalamo, che agisce come un termostato biologico. Quando la situazione non è più termoneutra la temperatura del corpo può scendere oppure salire.

Quando la temperatura scende:

- Brividi
- Vasocostrizione periferica (mani, piedi) → meno dispersione di calore
- Piloerezione (la "pelle d'oca") → cerca di intrappolare uno strato d'aria isolante (efficace solo nei mammiferi pelosi... quindi meno utile per noi)
- A lungo termine: attivazione del grasso bruno

Quando la temperatura sale:

- Sudorazione → evaporazione dell'acqua rimuove calore (1 g di sudore evapora = ~0.58 kcal dissipate)
- Vasodilatazione periferica → aumenta la perdita di calore
- Riduzione della termogenesi

Il bilancio termico: una "lotta continua"

Ogni secondo il corpo bilancia produzione e perdita di calore:

- Produzione: metabolismo, termogenesi della dieta, attività muscolare.
- Perdita: irraggiamento, convezione, conduzione ed evaporazione.

La regolazione è finemente modulata: bastano variazioni di 0.5 °C per scatenare meccanismi compensatori.

La determinazione della potenza termica emessa dal corpo umano è un'applicazione affascinante della termodinamica e della fisiologia. Si basa sul Primo Principio della Termodinamica applicato a un sistema biologico. A tal uopo riprendiamo la relazione (3) $\Delta U = E_{in} + Q - L$ osservando che nell'ipotesi di stazionarietà $\Delta U = 0$ si ha $E_{in} = -(Q - L)$ ma il calore ceduto all'ambiente va preso con il segno negativo, quindi $E_{in} = Q + L$ o anche

$$Q = E_{in} - L \quad (8)$$

A parole: l'energia netta dispersa verso l'ambiente (Q) è data dalla differenza fra l'energia prodotta dal metabolismo E_{in} e l'energia (L) spesa verso l'esterno.

Se ora consideriamo la versione differenziale con il tempo si ha

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE_{in}}{dt} - \frac{dL}{dt} \rightarrow \dot{Q} = M - P$$

Ed ogni termine sarà espresso non più in joule ma in watt, allora dQ/dt sarà la potenza termica, M sarà il tasso metabolico, ossia la velocità con cui il corpo converte l'energia chimica del cibo in energia utilizzabile e P sarà la potenza meccanica (energia/unità di tempo) che il corpo esercita sull'ambiente (sollevare un peso, camminare, scrivere, parlare, correre...). Al fine di calcolare Q occorrerà preliminarmente calcolare M e P .

Per quanto riguarda L diciamo innanzitutto che una persona a riposo, seduta o in piedi, il lavoro meccanico esterno è nullo: $L \approx 0$. Anche se i muscoli si contraggono per mantenere la postura, non stanno compiendo lavoro su un oggetto esterno (Lavoro = Forza · Spostamento). Tutta l'energia di queste contrazioni si degrada immediatamente in calore all'interno del corpo. Per una persona in attività, invece, L è la potenza meccanica misurabile.

Ipotizziamo uno scenario semplice da valutare pensando ad un ciclista su un ergometro (cyclette con misuratore di potenza) pedalando con una velocità costante, sviluppi una potenza, che sarà anch'essa costante, di 180 W, si avrà $P = 180$ W.

[Ci si potrebbe chiedere con quale velocità pedalare per sviluppare una potenza di 180 W, la risposta dipende da che tipo di ergometro stai usando, perché ogni macchina ha un suo profilo di resistenza, ad esempio: fissa (imposta una certa forza), proporzionale alla velocità (resistenza tipo frenatura magnetica o aria), oppure costante in potenza (le più moderne). La relazione da usare è quella che lega la potenza alla forza ed alla velocità

$$P = F v$$

Supponiamo un ergometro che abbia una forza resistente sui pedali di 150 N (circa 15 kg), quindi la velocità lineare con cui pedalare è $v = P/F = 180 / 150 = 1.2$ m/s

Ma forse è più utile calcolare le pedate al minuto, a tal fine supponendo che la cyclette abbia un raggio della corona di 17.5 cm (valore tipico), la sua circonferenza è $C = 2 \pi r = 1.10$ m, quindi in numero di pedate al secondo è, ricordando che $v = \text{spazio/tempo} = C/\text{tempo} = Cf$, si ha $f = v/C = 1.2/1.1 = 1.09$ giri/s, se li vogliamo convertire al più usuale ed utile giri al minuto (rpm) si ha

$$rpm = 1.09 \frac{60 \text{ giri}}{60 \text{ s}} = 1.09 \frac{60 \text{ giri}}{\text{min}} = 65.4 (\text{giri} / \text{min})$$

Cioè poco più di una pedalata al secondo.]

Al fine di valutare M bisogna considerare che durante una attività fisica esso aumenta. Ricordiamo che il suo valore basale che potremo indicare con M_0 è di circa 100 W, come abbiamo già visto nel paragrafo dedicato al metabolismo basale, allora l'aumento sarà $\Delta M = M - M_0$. Considerando che la "macchina" corpo umano ha una efficienza intorno al 20%, vuol dire che per compiere un lavoro utile con potenza di 180 W, come nel caso del ciclista, l'attività metabolica dovrà aumentare di 900 W!

$$\text{efficienza} \equiv \eta = \frac{P}{\Delta M}$$

$$\Delta M \equiv M - M_0 = \frac{P}{\eta} = \frac{180}{0.2} = 900W$$

$$M = 900 + M_0 = 900 + 100 = 1000W$$

Ora possiamo calcolare il calore da dissipare

$$dQ/dt = M - P = 1000 - 180 = 820 W$$

Questo risultato è impressionante: per produrre 180 Watt di potenza sui pedali, il corpo del ciclista deve dissipare 820 Watt di calore!

Questo spiega l'intensa sudorazione e il surriscaldamento durante l'attività fisica.

Possiamo riassumere in questo schemetto l'esempio visto sopra.

Scenario	Tasso Metabolico (M)	Lavoro meccanico (L)	Potenza termica dQ/dt
Persona a riposo	100	0	100
Ciclista (con pedalata leggera)	1000	180	820

Ecco alcuni valori approssimativi dei valori di potenza meccanica in varie attività.

Attività	Consumo (Watt)	Note
🛌 Dormire	~70 W	Metabolismo basale
📖 Seduti rilassati	~100 W	Lavoro da scrivania
🚶 Camminare (3-4 km/h)	~200 W	Passeggiata tranquilla
🚶 Camminare (5-6 km/h)	~300 W	Passo sostenuto
🚲 Pedalare (tranquillo)	~400-500 W	Bici da città, ritmo blando
🚲 Pedalare (intenso)	~800-1000 W	Ciclista allenato, ritmo forte
🏃 Correre (8-10 km/h)	~700-900 W	Corsa regolare
🏃 Correre (12-15 km/h)	~1000-1200 W	Corsa veloce
🏋 Sforzo fisico intenso	~1200-1500+ W	Lavoro fisico pesante, sport ad alta intensità

Conoscere la potenza termica del corpo umano è fondamentale in molti campi, ad esempio:

Progettazione di impianti di climatizzazione (HVAC): Gli ingegneri devono calcolare il "carico termico" di un ambiente. In un ufficio, un cinema o una palestra affollata, il calore emesso dalle persone è una componente significativa da considerare per dimensionare correttamente l'impianto di raffreddamento.

Architettura e bioedilizia: Per progettare edifici energeticamente efficienti che sfruttino o gestiscano il calore umano.

Abbigliamento tecnico: I tessuti sportivi sono progettati per massimizzare la dispersione del calore, soprattutto tramite evaporazione.

Occorrerà precisare che finora abbiamo usato un valore approssimativo del tasso metabolico a riposo indicandolo intorno ai 100 W, ma tale valore in effetti varia da 60 a 100W seconda di età, sesso, massa magra e superficie corporea.

Un valore medio per uomo è circa $80 \text{ W} \pm 10 \text{ W}$.

Per le donne tale valore è inferiore: 50–70 W.

Come riportano le riviste McArdle, Katch & Katch – "Exercise Physiology" e NASA technical reports.

Il dato dei 100 W sono più un valore simbolico che reale è una stima comoda da ricordare (e usata spesso anche nei corsi di fisica come ordine di grandezza).

Considerando una potenza media giornaliera M di 70 W erogata in modo costante per 24 ore, si ottiene un'energia giornaliera:

$$E = P \cdot t = 70 \text{ W} \cdot 24 \text{ h} = 70 \text{ W} \cdot 86,400 \text{ s} = 6.048 \text{ MJ} = 1450 \text{ kcal}$$

$M = 1450 \text{ kcal/giorno} = 70 \text{ W}$

Questo valore è in linea con quello stimato con le formule empiriche che abbiamo usato nel paragrafo sul Metabolismo Basale.

Principi della Termoregolazione

Il corpo umano mantiene una temperatura interna costante di circa 37°C attraverso un equilibrio tra produzione e perdita di calore:

Bilancio Termico all'equilibrio: produzione di calore = uscita di calore

$$M = \pm R \pm C \pm D - E$$

Dove:

M = produzione di calore

R = radiazione

C = convezione

D = conduzione

E = evaporazione

Produzione di Calore (M)

Termogenesi Metabolica

La produzione di calore deriva principalmente da:

- Metabolismo basale (60-70%)
- Attività muscolare (20-30%)
- Effetto termico degli alimenti (8-12%)

Termogenesi da Brivido

In condizioni di freddo, il brivido può aumentare la produzione di calore fino a 5 volte il valore basale:

Produzione di calore da brivido = BMR \times 5

Perdita di Calore ($\pm R \pm C \pm D - E$)

Meccanismi di perdita e formule quantitative per il loro calcolo.

R: Radiazione (45-50%) $Q_{\text{rad}} = \sigma \epsilon A (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4)$

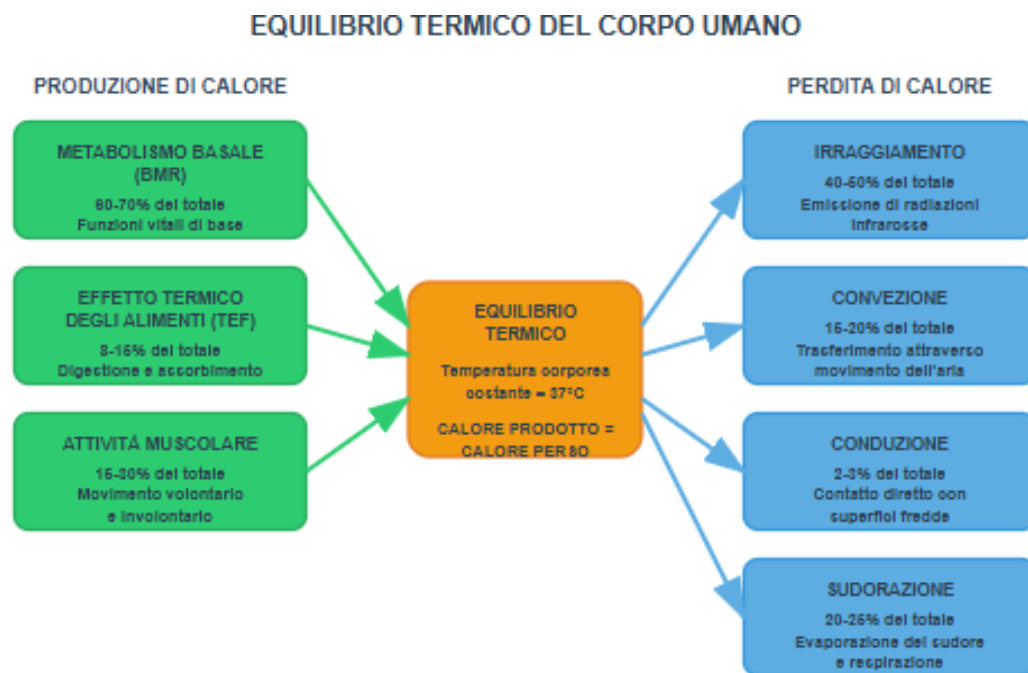
C: Convezione (30-35%) $Q_{\text{conv}} = h A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{amb}})$

D: Conduzione (2-3%) $Q_{\text{cond}} = k A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{superficie di contatto}}) / d$

E: Evaporazione (20-25%) $Q_{\text{evap}} = \lambda m_{\text{vapore}}$

Dove:

- σ = costante di Stefan-Boltzmann ($5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$)
- ε = emissività della pelle ($\approx 0,95$)
- A = area superficiale corporea
- h = coefficiente di convezione
- k = conduttività termica
- d è lo spessore attraverso il quale avviene lo scambio termico, esso non è solo lo spessore della pelle, ma rappresenta lo spessore efficace dello strato isolante combinato di pelle e, soprattutto, di grasso sottocutaneo.
- λ = calore latente di vaporizzazione dell'acqua (2430 kJ/kg)



- **Irraggiamento (R)** - Ogni corpo per il solo fatto di essere ad una certa temperatura emette radiazione, detta termica, a temperature ordinarie essa è sostanzialmente radiazione infrarossa. Non ha bisogno di contatto. È la sensazione di calore che provate vicino a un caminetto acceso, anche se l'aria della stanza è fresca. O la sensazione di freddo vicino a una grande finestra in inverno, perché il vostro corpo "irradia" calore verso la superficie fredda del vetro.
- **Convezione (C)** - È il calore trasportato via dal movimento di un fluido (l'aria). Una leggera brezza in estate ci fa sentire subito meglio perché porta via lo strato d'aria calda a contatto con la nostra pelle.
- **Conduzione (D)** - È il calore disperso quando tocchiamo oggetti con temperatura diversa da quella corporea, si ricordi che la conduzione avviene quando due corpi solidi aventi differenza di temperatura vengono a contatto, pertanto si capisce che questo aspetto del trasferimento termico è del tutto marginale.
- **Evaporazione (E)** - quando il corpo si surriscalda (temperatura esterna alta e/o attività muscolare) il sistema di termoregolazione entra in azione facendo produrre sudore dalle ghiandole sudoripare. Il sudore è principalmente acqua con un po' di sali minerali. Il sudore evaporando dalla pelle sottrae calore al corpo.

Irraggiamento

Si tratta, come già osservato, dell'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di un corpo dovuta alla sua temperatura. Qualunque corpo con temperatura > 0 K irradia energia sotto forma di onde elettromagnetiche (in particolare infrarosse per il corpo umano).

L'irraggiamento è un processo a due vie. Il nostro corpo irradia calore verso l'ambiente, ma allo stesso tempo assorbe il calore irradiato dagli oggetti circostanti (muri, mobili, ecc.). La perdita netta di calore è quindi determinata dalla differenza tra l'energia emessa dal corpo e quella assorbita dall'ambiente. Se ci troviamo in una stanza fredda, la perdita di calore per irraggiamento sarà maggiore rispetto a quando siamo in una stanza calda.

La temperatura del corpo in condizioni in cui la temperatura non superi i $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ circa irradia energia verso l'ambiente, nel contempo riceve anche energia dall'ambiente in quanto anch'esso per il fatto di essere ad una certa temperatura emetterà radiazione termica. La quantità di calore netta emessa per irraggiamento dipende allora sia dalla temperatura corporea che da quella ambientale, la formula che descrive questo comportamento è la seguente (legge di Stefan-Boltzmann)

$$P_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A_{\text{eff}} (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4)$$

P è la potenza netta irradiata (W)

ε = emissività del corpo umano (~ 0.97 , quasi un corpo nero)

σ (costante di Stefan-Boltzmann) = $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

A_{eff} = area radiante effettiva (non è la superficie corporea (circa 1.8 m^2 per un adulto medio) ma l'area del corpo che "vede" effettivamente l'ambiente circostante). Parti del corpo irradiano calore verso altre parti del corpo (es. l'interno delle braccia verso il torso) e questo non contribuisce alla perdita netta di calore. L'area radiante effettiva tiene conto solo delle superfici che hanno una "linea di vista" libera con l'ambiente esterno. Si stima questo valore a circa l'80% della superficie corporea, quindi il suo valore di riferimento è circa 1.35 m^2 .

T_{pelle} = temperatura del corpo (pelle) in kelvin

T_{amb} = temperatura media ponderata dell'ambiente in kelvin

Ad esempio se $T_{\text{pelle}} = 306 \text{ K} = 33\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $T_{\text{amb}} = 294 \text{ K} = 21\text{ }^{\circ}\text{C}$, $A_{\text{eff}} = 1.35 \text{ m}^2$

$P = 97.5 \text{ W}$

Se invece, ci riferiamo ad una stanza con temperatura di 25°C (298 K) la potenza irraggiata è

$P = 65 \text{ W}$

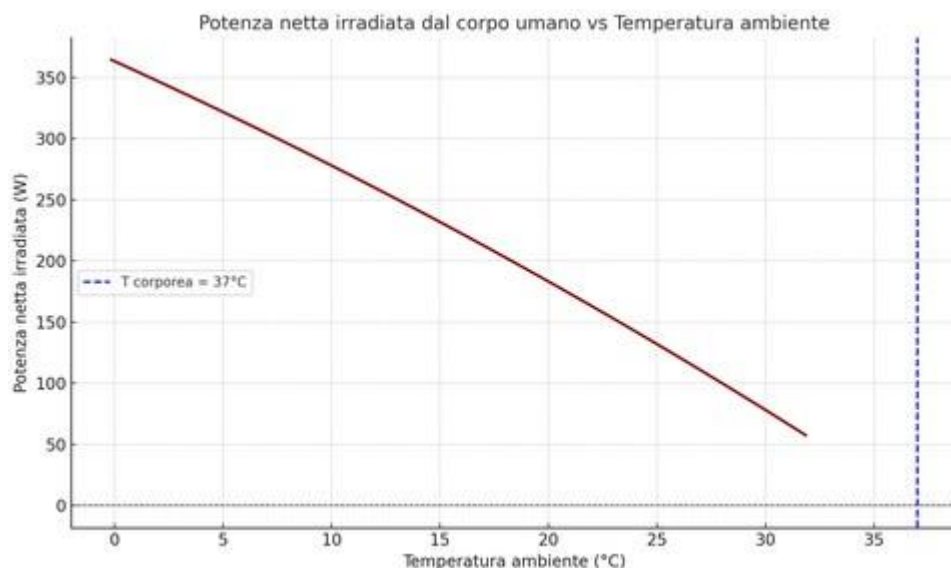
Come si può vedere, semplicemente aumentando la temperatura della stanza di $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, la potenza dissipata per irraggiamento crolla da 97.5 W a circa 65 W . Questo dimostra la sensibilità estrema della legge di Stefan-Boltzmann alla differenza di temperatura.

Si tenga presente che tale irraggiamento di calore vale per un corpo nudo. L'abbigliamento gioca un ruolo cruciale nel controllare la perdita di calore per irraggiamento. I vestiti non "producono" calore, ma agiscono come uno strato isolante che intrappola uno strato d'aria vicino alla pelle. Questo riduce la quantità di calore che può essere irradiata direttamente verso l'ambiente esterno.

Materiali diversi hanno proprietà radiative diverse. Ad esempio, una coperta di emergenza (la classica coperta isoterma color argento/oro) ha una superficie a bassa emissività che riflette il calore del corpo verso l'interno, riducendo drasticamente la perdita per irraggiamento.

Si osservi inoltre che la temperatura ambiente non coincide con la temperatura dell'aria: se all'interno di una stanza ci sono delle superfici che presentano una temperatura molto più alta di quella dell'aria (si pensi alla fiamma di un caminetto), la temperatura ambientale sarà una media nella quale la presenza di questa zona molto calda incide significativamente.

Nelle case italiane invece, dove ormai non esistono più camini o stufe, generalmente la temperatura media radiante coincide con la temperatura dell'aria, o addirittura risulta inferiore.



Si vede che più l'ambiente è freddo, più il corpo irradia energia (fino a oltre 300 W a 0 °C). Man mano che la temperatura ambiente si avvicina ai 37 °C, la radiazione netta tende a zero: il corpo non riesce più a disperdere calore per irraggiamento. A temperature sopra i 37 °C, la curva diventerebbe negativa (il corpo assorbirebbe calore dall'ambiente).

Osservazione

Nel caso della temperatura ambiente di 21 °C abbiamo visto che si ha $P = 97.5$ W, ma sappiamo che il metabolismo basale è intorno ai 80 W, inoltre considerando che si ha anche perdita di calore per conduzione ed evaporazione il suo valore è maggiore, diciamo intorno ai 120 W, allora come è possibile che l'uscita sia maggiore dell'entrata? La risposta è che il valore di 80 W si riferisce alle condizioni di metabolismo basale, quindi per una temperatura, per un corpo nudo, di 28-30°C, se invece il corpo è vestito in modo leggero la temperatura "comfort" è sui 22 °C.. Una stanza a 21 °C è un ambiente freddo per un corpo nudo. In queste condizioni, il corpo non può rimanere al suo metabolismo basale. Per evitare che la temperatura interna scenda, il sistema nervoso attiva la

termogenesi, cioè aumenta la produzione di calore attraverso la vasocostrizione e le contrazioni muscolari involontarie (brividi).

La vasocostrizione riduce il flusso di sangue alla pelle, questo abbassa la temperatura della pelle (T_{pelle}), riducendo la differenza ($T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4$) e quindi limitando la perdita per irraggiamento.

Termogenesi non da brivido: Il metabolismo dei tessuti, in particolare del tessuto adiposo bruno, viene accelerato per produrre più calore.

Termogenesi da brivido: Se la prima non basta, iniziano le contrazioni muscolari involontarie (brividi), che generano una quantità significativa di calore.

In conclusione: il corpo non emette più di quanto produce. Semplicemente, quando la perdita di calore è alta (come a 21 °C per un corpo nudo), il corpo aumenta la sua produzione di calore ben al di sopra del livello basale per compensare perfettamente questa perdita.

E se la temperatura esterna è maggiore di quella della pelle?

Analizziamo il caso con una temperatura ambiente di 40 °C.

Temperatura Ambiente (T_{amb}): 40 °C

Temperatura Corporea T_{interna} : 37 °C

Temperatura della Pelle (T_{pelle}): 36 °C

In condizioni di caldo, il corpo fa di tutto per raffreddarsi, quindi attua la vasodilatazione: aumenta al massimo il flusso di sangue verso la pelle per portare il calore dall'interno verso la superficie. La temperatura della pelle si avvicina molto a quella interna. Ipotizziamo una T_{pelle} di 36 °C (309.15 K).

Inserendo questi valori nella relazione mostrata sopra si ha

$$P_{\text{rad}} = \sigma \varepsilon A_{\text{eff}} (T_{\text{pelle}}^4 - T_{\text{amb}}^4) = -36 \text{ W}$$

Cosa significa un valore negativo?

Significa che il flusso netto di calore è dall'ambiente verso il corpo. Invece di perdere calore per irraggiamento, il corpo umano sta assorbendo circa 36 Watt di calore radiante dalle pareti e dagli oggetti circostanti, che sono più caldi della sua pelle.

Analisi della Convezione (Q_{conv})

La convezione è la trasmissione di calore tramite il movimento di un fluido (in questo caso, l'aria). La sua direzione dipende dalla differenza di temperatura tra la pelle e l'aria.

Poiché la temperatura dell'aria (40 °C) è superiore a quella della pelle (36 °C), anche la convezione lavora contro di noi.

L'aria calda a contatto con la pelle le cede calore. Anche la convezione diventa un guadagno termico per il corpo. Il valore esatto dipende dalla velocità dell'aria, ma possiamo stimare un guadagno di circa 10-20 W.

A 40 °C, i due meccanismi principali di raffreddamento a riposo (irraggiamento e convezione) sono diventati inefficaci e, anzi, contribuiscono a riscaldare il corpo.

Come fa il corpo a sopravvivere?

La risposta è: l'evaporazione. Essa diventa in questa situazione l'unico meccanismo efficace di dissipazione del calore.

L'equazione del bilancio energetico diventa:

$$M - W + Q_{\text{rad}} + Q_{\text{conv}} + Q_{\text{evap}} = 0$$

Dove:

M: Produzione di calore metabolico (ad esempio quello basale è circa 100 W).

W: Lavoro meccanico (lo poniamo a zero a riposo).

Q_{rad} : Guadagno di calore per irraggiamento (es. +36 W).

Q_{conv} : Guadagno di calore per convezione (es. +15 W).

Q_{evap} : Perdita di calore per evaporazione. Deve compensare tutto il resto.

Calcoliamo la perdita per evaporazione richiesta:

$$Q_{\text{evap}} = - (M + Q_{\text{rad}} + Q_{\text{conv}})$$

$$Q_{\text{evap}} = - (100 \text{ W} + 36 \text{ W} + 15 \text{ W})$$

$$Q_{\text{evap}} = - 151 \text{ W}$$

Il corpo deve dissipare 151 W di potenza termica solo attraverso l'evaporazione (il segno meno indica una perdita).

Per sapere come quantificare questo processo vedi Nota 1 del paragrafo “Evaporazione”.

La nostra armatura segreta: l'abbigliamento

L'abbigliamento è la nostra principale arma per controllare lo scambio termico. La sua capacità di isolamento si misura in "clo".

1 clo = L'isolamento fornito da un tipico abito da uomo (pantaloni, camicia, giacca, cravatta).

0 clo = Corpo nudo (nessuna resistenza termica).

0,5 clo = Abbigliamento estivo leggero.

4 clo = Abbigliamento polare pesante.

I vestiti non solo isolano, ma aumentano anche la superficie che scambia calore con l'ambiente (FCL). Un cappotto ampio ha una superficie esterna maggiore del nostro corpo.

Quando calcoliamo lo scambio di calore per irraggiamento di una persona vestita, non usiamo la temperatura della pelle, ma la temperatura superficiale esterna dei vestiti, che è ovviamente più bassa.

Convezione

La convezione è uno dei principali meccanismi con cui il corpo umano scambia calore con l'ambiente, insieme a conduzione, irraggiamento ed evaporazione. Si tratta di un processo in cui il calore viene trasferito grazie al movimento di un fluido (aria o acqua) a contatto con la pelle.

A differenza della conduzione, che avviene per contatto diretto con una superficie statica, la convezione implica il trasferimento di calore tramite il movimento di un fluido, come l'aria o l'acqua. Questo processo gioca un ruolo fondamentale nella nostra termoregolazione quotidiana, influenzando la nostra sensazione di caldo e freddo in modi talvolta sorprendenti.

Principio fisico della convezione

La convezione si basa su un principio fisico semplice: quando un fluido (aria o acqua) viene a contatto con una superficie più calda, come la nostra pelle, ne assorbe il calore. Riscaldandosi, questo fluido si espande, diventa meno denso e tende a salire, venendo rimpiazzato da fluido più freddo e denso che a sua volta si riscalda. Questo ciclo continuo, chiamato moto convettivo, crea una corrente che allontana efficacemente il calore dalla superficie del corpo. Si stima che, in condizioni di riposo, la convezione sia responsabile di circa il 10-15% della perdita totale di calore del corpo.

Esistono due tipi principali di convezione:

- **Convezione Naturale:** avviene spontaneamente. L'aria a contatto con la nostra pelle si riscalda, diventa più leggera e sale, sostituita da aria più fresca. È un processo costante ma relativamente lento.
- **Convezione Forzata:** si verifica quando il movimento del fluido è accelerato da una forza esterna, come il vento generato da un ventilatore o le correnti naturali. Questo tipo di convezione aumenta drasticamente la velocità di scambio termico.

Il nostro corpo è quasi sempre circondato da un sottile strato di aria che, riscaldato dalla pelle, funge da isolante, rallentando la perdita di calore. La convezione, specialmente quella forzata, "strappa via" questa bolla d'aria isolante, sostituendola continuamente con aria più fredda. Questo è il motivo per cui una leggera brezza in una giornata calda può dare una piacevole sensazione di fresco: non abbassa la temperatura dell'aria, ma accelera la rimozione del calore dal nostro corpo.

Il sistema circolatorio, come per la conduzione, è un attore chiave. In risposta al caldo, la vasodilatazione porta più sangue caldo in superficie, aumentando la temperatura della pelle e massimizzando così la perdita di calore per convezione. Al contrario, con il freddo, la vasocostrizione riduce il flusso di sangue alla pelle, abbassandone la temperatura e conservando il calore interno.

L'impatto della convezione sulla nostra vita è evidente in molte situazioni quotidiane e ha implicazioni dirette per il nostro comfort, la nostra salute e le nostre prestazioni.

L'Effetto Vento (Wind Chill)

Il vento è l'esempio più comune di convezione forzata. L'effetto "wind chill" descrive come la nostra percezione della temperatura sia più bassa di quella reale a causa dell'azione del vento. Un vento freddo e secco può aumentare il rischio di irritazioni cutanee e problemi alle vie respiratorie. In casi estremi, può accelerare pericolosamente la perdita di calore, portando all'ipotermia.

L'Immersione in Acqua

L'acqua è un conduttore di calore molto più efficiente dell'aria. Quando siamo immersi, il calore viene trasferito dal nostro corpo all'acqua non solo per conduzione, ma anche e soprattutto per convezione, a causa dei movimenti del fluido. Questo spiega perché si avverte freddo molto più rapidamente in acqua a 25°C che in aria alla stessa temperatura. La perdita di calore per convezione in acqua può essere fino a 25 volte superiore a quella in aria calma alla stessa temperatura, rendendo l'immersione in acque fredde particolarmente pericolosa.

Il Ruolo dell'Abbigliamento

Gli indumenti agiscono come una barriera contro la convezione. Intrappolano uno strato d'aria tra il tessuto e la pelle, impedendone il movimento. Quest'aria ferma si riscalda e funge da isolante, riducendo drasticamente la quantità di calore persa. I vestiti a più strati sono particolarmente efficaci perché creano molteplici strati d'aria intrappolata. I materiali antivento sono progettati specificamente per bloccare la convezione forzata, mantenendo intatto lo strato d'aria isolante vicino al corpo.

Convezione e Salute

Sebbene spesso associata al raffreddamento, la convezione ha anche aspetti benefici. Una brezza leggera può migliorare la qualità dell'aria che respiriamo, disperdendo inquinanti e allergeni. Tuttavia, correnti d'aria costanti, soprattutto se fredde o umide, possono avere effetti negativi. Alcune persone, definite "meteoropatiche", sono particolarmente sensibili al vento, che può scatenare mal di testa, nervosismo, dolori muscolari e persino un aumento della pressione sanguigna.

In sintesi, la convezione è un potente meccanismo di scambio termico, un "vento" che può rinfrescare o raffreddare, a seconda della sua intensità e della temperatura del fluido circostante. Il nostro corpo, attraverso la regolazione del flusso sanguigno cutaneo, e noi, attraverso la scelta dell'abbigliamento, mettiamo in atto continue strategie per gestire questo dialogo con l'ambiente, cercando di mantenere l'equilibrio termico necessario per il nostro benessere.

La relazione che quantifica tale effetto è la Legge del raffreddamento di Newton:

$$\frac{Q}{t} = h A (T_{\text{pelle}} - T_{\text{fluido}})$$

dove:

$\frac{Q}{t}$ = flusso di calore (W)

h = coefficiente di scambio termico (W/(m² · K)), dipende da velocità e tipo di fluido

A = area di pelle esposta (m²)

T_{pelle} e T_{fluido} = temperature in °C

In aria: il coefficiente h è basso ($\sim 2\text{--}25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$) e cresce molto con la velocità del vento.

In acqua: il coefficiente h è molto più alto ($\sim 100\text{--}600 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$) → raffreddamento molto più rapido, anche senza movimento.

L'acqua sottrae calore ~ 25 volte più velocemente dell'aria alla stessa temperatura.

Esempio numerico

Temperatura pelle = 34°C

Temperatura aria = 20°C ($\Delta T = 14 \text{ K}$)

Area esposta $A = 0.8 \text{ m}^2$ (gran parte del corpo)

Coefficiente $h = 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ (aria in leggera brezza)

$$\frac{Q}{t} = 10 \times 0.8 \times 14 = 112 \text{ W}$$

Significa $\sim 112 \text{ J/s}$ persi per convezione → circa 96.4 kcal/ora .

Se il vento aumenta e h passa a 25:

$$\frac{Q}{t} = 25 \times 0.8 \times 14 = 280 \text{ W}$$

→ $\sim 241 \text{ kcal/ora}$: quasi 2,5 maggiore in questo caso.

Ruolo fisiologico

Il corpo può modulare la perdita per convezione:

Vasodilatazione cutanea: più sangue caldo arriva alla pelle → più calore ceduto all'aria o all'acqua.

Vasocostrizione cutanea: riduce il flusso sanguigno superficiale per trattenere calore.

Peli eretti (piloerezione): negli animali, intrappolano uno strato d'aria riducendo la convezione naturale (negli umani l'effetto è minimo).

Comportamenti: vestirsi a strati, cercare riparo dal vento, o viceversa esporsi ad aria in movimento per raffreddarsi.

Convezione vs conduzione

Conduzione: richiede contatto diretto e scambio molecolare (importante solo se il fluido è fermo).

Convezione: richiede movimento del fluido, ed è molto più efficace quando il fluido ha alta velocità o alta capacità termica (es. acqua).

In aria ferma, la perdita per convezione naturale è simile alla conduzione; con vento o movimento in acqua, domina nettamente.

Importanza clinica e sportiva

In sport acquatici (nuoto, immersione) il raffreddamento per convezione in acqua può portare rapidamente a ipotermia, anche in acque temperate.

In montagna, la combinazione di freddo e vento (wind chill) aumenta drasticamente la perdita di calore e il rischio di assideramento.

In ambienti caldi, ventilatori o vento accelerano la dispersione di calore (a patto che la temperatura dell'aria sia inferiore a quella della pelle).

Conduzione

La conduzione è il trasferimento di calore attraverso il contatto diretto tra corpi o materiali con diversa temperatura. L'energia si propaga per vibrazione molecolare e trasferimento microscopico di energia cinetica, senza movimento macroscopico di materia.

Legge di Fourier della conduzione:

$$\frac{Q}{t} = k A \frac{\Delta T}{d}$$

dove:

$\frac{Q}{t}$ = flusso di calore (W)

k = conducibilità termica del materiale (W/(m · K))

A = area di contatto (m²)

ΔT = differenza di temperatura tra le superfici (K o °C)

d = spessore dello strato conduttore (m)

A livello microscopico, l'energia termica si manifesta come l'oscillazione delle molecole di un materiale.[1] Quando una parte del corpo più calda entra in contatto con una più fredda, le molecole che vibrano più velocemente (più calde) urtano quelle vicine più lente (più fredde), trasferendo loro energia. Questo processo a catena continua fino a quando non si raggiunge un equilibrio termico. È importante notare che nella conduzione non c'è un trasporto di materia, ma solo di energia.

Conduzione nel corpo umano

Nel corpo umano, la conduzione può avvenire in due contesti principali:

All'interno del corpo

Il calore prodotto nei muscoli e negli organi si propaga verso la pelle attraverso tessuti biologici (muscoli, grasso, pelle).

La conducibilità termica dei tessuti è relativamente bassa:

Acqua/tessuto muscolare: $k \approx 0.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

Tessuto adiposo: $k \approx 0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (ottimo isolante)

Lo strato adiposo funziona quindi come una “coperta naturale” riducendo la perdita di calore.

Tra corpo e ambiente

Quando il corpo tocca una superficie (terra, metallo, acqua ferma), il calore fluisce per conduzione.

L'effetto è più marcato se il materiale a contatto ha alta conducibilità termica:

Metalli \rightarrow alto $k \rightarrow$ raffreddamento rapido

Legno o tessuti \rightarrow basso $k \rightarrow$ raffreddamento lento

L'acqua, pur non essendo conduttrice come i metalli, ha k e calore specifico elevati \rightarrow grande capacità di sottrarre calore.

Nel corpo umano, la conduzione gioca un ruolo duplice: può essere un meccanismo di perdita di calore o di acquisizione di calore. Se tocchiamo un oggetto più freddo della nostra pelle, come una lastra di metallo o un bicchiere di acqua ghiacciata, il calore fluisce dal nostro corpo verso l'oggetto, provocando una sensazione di freddo. Al contrario, se entriamo in contatto con una superficie più calda, il calore si trasferisce a noi. Sebbene a riposo rappresenti solo una piccola percentuale della dispersione totale di calore (circa il 2-3%), il suo impatto può diventare significativo in determinate situazioni, come quando si è immersi in acqua, che conduce il calore circa 20 volte più efficacemente dell'aria.

Esempio numerico

Supponiamo di poggiare la mano (area $A = 0.015 \text{ m}^2$) su una lastra metallica a 10°C . Temperatura pelle = 33°C , spessore pelle $d \approx 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$. Conducibilità pelle $k \approx 0.37 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Applicando Fourier:

$$\frac{Q}{t} = 0.37 \times 0.015 \times \frac{(33 - 10)}{0.002}$$
$$\frac{Q}{t} \approx 42.6 \text{ W}$$

Quindi in questa condizione si trasferiscono $\sim 42 \text{ J}$ ogni secondo dalla mano al metallo. In pochi secondi, la mano percepisce un forte raffreddamento.

Esempi Pratici di Conduzione Termica

Vestituario: Gli abiti non "producono" calore, ma agiscono come isolanti. Intrappolano uno strato d'aria vicino alla pelle. Poiché l'aria ferma è un cattivo conduttore di calore, questo strato rallenta notevolmente la dispersione di calore dal corpo per conduzione e convezione. Il potere isolante di un indumento dipende dal tipo di tessuto e dal suo spessore.

Sensazione Termica: Perché una maniglia di metallo a 20°C sembra molto più fredda di un libro alla stessa temperatura? La risposta risiede nella diversa conducibilità termica.[5] Il metallo è un eccellente conduttore e sottrae calore dalla nostra mano molto più rapidamente del legno o della carta, che sono isolanti. La nostra percezione non misura la temperatura dell'oggetto, ma la velocità con cui scambia calore con la nostra pelle.

Attività Fisica: Durante l'esercizio, l'attività muscolare genera una grande quantità di calore. Il corpo risponde con una vasodilatazione massiccia per trasportare questo calore in eccesso alla pelle, da cui può essere dissipato, anche per conduzione se siamo a contatto con superfici più fredde.

Applicazioni Mediche: La conduzione termica è sfruttata in diverse pratiche mediche. Impacchi caldi o freddi vengono utilizzati per alleviare il dolore muscolare o ridurre il gonfiore, trasferendo calore da o verso l'area interessata per conduzione. In procedure più complesse come la termoablazione, temperature estreme vengono applicate direttamente ai tessuti (ad esempio, tumori) per distruggerli, utilizzando la conduzione per propagare l'effetto termico.

Fattori che influenzano la perdita di calore per conduzione

1. Differenza di temperatura (ΔT): maggiore differenza → maggiore flusso di calore.
2. Area di contatto: superfici più grandi → più perdita.
3. Spessore dello strato isolante (pelle, abiti): maggiore spessore → minore conduzione.
4. Conducibilità del materiale a contatto: metallo > acqua > legno > aria.
5. Durata del contatto: più tempo → più energia scambiata.

La conduzione, pur essendo meno dominante della convezione o evaporazione in condizioni di aria ferma e asciutta, diventa cruciale in contatto diretto con materiali ad alta conducibilità o in acqua fredda. La sua comprensione è essenziale per la medicina sportiva, la fisiologia ambientale e la prevenzione dell'ipotermia.

Evaporazione

Quando l'acqua del sudore evapora, cioè passa dallo stato liquido a quello di vapore, assorbe energia.. Questo è l'energia necessaria per spezzare i legami tra le molecole d'acqua e farlo passare allo stato gassoso.

Il calore viene sottratto dalla pelle → la pelle si raffredda → il sangue che scorre vicino alla superficie si raffredda → il corpo si raffredda.

La formula che rende conto del processo è $Q = m \cdot L$

Q è il calore perso per evaporazione ed m è la massa di acqua che evapora

L è il calore latente di evaporazione che per l'acqua vale $L = 2.43 \text{ MJ/kg}$ (per temperatura corporea di 37°C). Se convertiamo L in kcal, ricordando che $1 \text{ kcal} = 4184 \text{ J}$, si ha

$$L = \frac{2.43 \cdot 10^6 \text{ J / kg}}{4184 \text{ J / kcal}} = 584 \text{ kcal / kg} = 0.58 \text{ kcal / g}$$

Abbiamo così una relazione più comoda da usare

$$Q = 0.58 \cdot m(\text{g})$$

Esempio. Supponendo di aver perso 500 g di sudore durante una certa attività motoria, e che tutto il sudore sia effettivamente evaporato e quindi abbia contribuito al raffreddamento, si ha

$$Q = 0.58 \cdot 500 = 290 \text{ kcal}$$

La perdita di calore attraverso la sudorazione può essere molto elevata.

Valori tipici del rateo di sudorazione con il tempo:

- Riposo: 50-100 g/h
- Attività moderata: 500-1000 g/h
- Attività intensa: 2000-3000 g/h

Questo è uno schema che illustra il processo della sudorazione.



Una formula più accurata che tiene conto dell'effetto dell'umidità dell'aria è la seguente:

$$\frac{dQ}{dt} = h_e A (p_s - p_a)$$

Dove dQ/dt è il flusso termico (potenza dissipata) in watt

h_e è il coefficiente di trasferimento evaporativo (W/m^2Pa)

A è l'area della superficie cutanea

p_s è la pressione di vapore saturo dell'acqua alla temperatura della pelle

p_a è la pressione di vapore parziale dell'aria (dipende dall'umidità relativa)

Si vede che ad esempio quando p_a si avvicina a p_s la differenza si riduce e l'evaporazione sarà minore.

La temperatura della pelle (non del sudore in sé, ma della superficie cutanea sudata) è di solito intorno ai 34–35 °C. Alla temperatura di 35 °C, la pressione di vapore saturo dell'acqua è circa:

$$p_s = 5620 \text{ Pa}$$

Opportune tabelle, dette "tabelle psicrometriche", noto il grado di umidità dell'aria, consentono di ricavare la pressione parziale del vapore d'acqua, come ad esempio la seguente tabella.

Temp (°C)	p_s (Pa)	Umidità rel. ϕ	p_a (Pa)
20	2338	50%	1169
20	2338	80%	1870
25	3169	60%	1901
30	4240	40%	1696
30	4240	60%	2544
35	5620	40%	2248
35	5620	80%	4496

Il valore dell'area della superficie cutanea A , è grosso modo di 2 m² per una persona alta 1.80 m.

Rimane da valutare il parametro h_e , spesso viene usata la seguente relazione empirica

$$h_e = 16.5 \cdot h_c$$

dove h_c è il coefficiente di scambio termico convettivo che dipende dalla velocità dell'aria, una stima del suo valore può essere fatta usando la seguente relazione

$$h_c = 2.38 \cdot v^{0.25} \text{ dove } v \text{ è espresso in m/s.}$$

Esempi tipici:

Velocità aria v [m/s]	h_c [W/m ² ·K]
0,1	1,3
0,3	1,7
0,5	2,0
1,0	2,4
2,0	2,8

In condizioni normali indoor (poca aria in movimento), $v \approx 0,3$ m/s si ha $h_c \approx 28$ W/m² Pa

Esempio. Usando i valori di un ambiente indoor $v = 0.3$, $h_c = 1.7$, $h_e = 28$ W/m² Pa si ha

Flusso di calore disperso: $dQ/dt = 154$ W

Nel caso di una corsa a 10 km/h (2.78 m/s) la pelle “sente” un flusso di aria maggiore rispetto al caso sedentario, quindi aumenta h_c e di conseguenza h_e . Correndo con tale velocità il corpo genera una potenza sui 300 W. Ma a causa dell’inefficienza del corpo umano, solo il 20% circa della potenza prodotta dal metabolismo va in lavoro meccanico, il resto è calore da dissipare. E’ una situazione perfettamente analoga al caso del motore a scoppio delle nostre auto le quali hanno una efficienza esse pure intorno al 20%., in effetti possiamo dire che noi per spostarci utilizziamo delle stufe!

Il corpo quindi è costretto a regolare la sua temperatura aumentando il sudore — ma solo la parte che evapora effettivamente contribuisce al raffreddamento in quanto il sudore che gocciola è “sprecato” in termini di perdita di calore.

Abbiamo i seguenti dati:

$v = 3$ m/s (questa è la velocità relativa dell'aria sulla pelle dovuta al moto in assenza di vento)

Temperatura aria 30 °C

Umidità relativa 30%

Superficie corporea 2 m²

Temperatura della pelle 35 °C

P_s (35 °C) = 5620 Pa

$P_a = 0.50 P_s$ (35 °C) = 2120 Pa

$h_c = 2.38 \cdot v^{0.25} = 2.38 \cdot 3^{0.25} = 3.13$ W/m² Pa

$h_e = 16.5 \cdot h_c = 16.5 \cdot 3.13 = 51.6$ W/m² Pa

$$dQ/dt = h_e A (p_s - p_a) = 342 \text{ W} = 294 \text{ kcal/h}$$

Quanti grammi di sudore sono necessari per dissipare 294 kcal/h di calore che si disperde per evaporazione?

Sapendo che 1 grammo di sudore evaporato sottrae 0.58 kcal possiamo calcolare la massa occorrente:

$$massa\ sudore(g) = \frac{294}{0.58} = 507 (g / h)$$

Quindi durante una corsa a 10 km/h, in condizioni ambientali calde-umide, occorre far evaporare circa 0,5 L di sudore all'ora per mantenere la temperatura corporea.

Nota: la sudorazione reale è anche maggiore, perché non tutto il sudore evapora in quanto parte scivola via un valore realistico è di circa 1 L/h.

Fattori che influenzano h_e :

Fattore	Effetto su h_e
Velocità dell'aria	↑ velocità → ↑ h_e
Postura / movimento	Se ti muovi o cammini → ↑ h_e , quindi ↑ h_e
Abbigliamento	Copre la pelle → ↓ superficie efficace → ↓ effetto evaporativo
Sudorazione attiva	Aumenta l'effetto evaporativo potenziale, ma solo se il sudore può evaporare
Umidità alta	Non riduce h_e , ma riduce $\Delta p = p_s - p_a$ quindi riduce il flusso effettivo

Da notare che se l'aria ha una pressione parziale di vapore d'acqua uguale o superiore a quella del corpo non può avvenire scambio di tipo diffusivo attraverso la pelle né scambio di tipo evaporativo. In una situazione limite di condizione ambientale "caldo - umida" in cui la temperatura dell'aria sia uguale a 37°C e il grado igrometrico sia pari a 100% (la temperatura coincide di fatto con la temperatura del corpo umano e quindi le due pressioni si eguagliano), lo scambio evaporativo è nullo. Ciò non significa che il corpo umano non sudi. L'organismo infatti percepisce soltanto la sensazione di "caldo" o "freddo" e non può avere una giusta misurazione igrometrica: l'organismo suda, si copre di film liquido, ma esso non evapora e quindi non asporta calore dal corpo; il centro termoregolatore continua a percepire caldo vengono persi inutilmente litri di sudore, senza riuscire a raffreddare il corpo.

Concludiamo questa sezione facendo il confronto fra due situazioni esplicative del fenomeno.

Caso A: Deserto (Umidità 10%). L'aria è secca, quindi p_v è molto basso. La differenza ($p_s - p_a$) è grande. Il nostro sudore evapora istantaneamente, raffreddandoci in modo super efficiente. Ci sentiamo caldi, ma è sopportabile.

Caso B: Giungla (Umidità 95%). L'aria è quasi satura di vapore, quindi p_a è molto alto, quasi uguale a p_s . La differenza ($p_s - p_a$) è minima. Sudiamo a litri, ma il sudore non riesce a evaporare. Rimane sulla pelle, non sottrae calore e ci sentiamo oppressi, appiccicosi e spossati. L'afa è più pericolosa del caldo secco!

Nota 1.

Riprendendo l'esempio fatto al paragrafo "Irraggiamento", quantifichiamo il sudore necessario per smaltire un'attività fisica che sviluppa 151 W di potenza.

L'acqua (sudore) per passare dallo stato liquido a quello gassoso (vapore) assorbe una grande quantità di energia termica (in questo caso lo assorbe dalla pelle), chiamata calore latente di vaporizzazione, è ovvio che questo valore dipende dalla temperatura, infatti basti pensare che più ci si avvicina alla temperatura di ebollizione di una sostanza (a una certa pressione), minore sarà il calore latente richiesto per farla evaporare.

Per l'acqua a temperatura corporea, questo valore è di circa 2430 joule per grammo ($2.43 \cdot 10^6$ J/kg).

Per dissipare 151 W (che sono 151 J/s), di quanto sudore abbiamo bisogno?

$$\begin{aligned} Tassodi\ sudorazione(g / s) &= \frac{Potenza(J / s)}{Calorelatente(J / g)} = \frac{151}{2430} = 0.062\ g / s = \\ &= 0.062 \frac{3600\ g}{3600\ s} = 0.062 \cdot 3600\ g / h = 223.2\ g / h \end{aligned}$$

Quindi, solo per stare fermo a 40 °C, il corpo deve produrre e far evaporare quasi un quarto di litro (250 g) di sudore ogni ora per mantenere stabile la sua temperatura interna. Se si aggiunge anche una minima attività fisica (che aumenta M), il tasso di sudorazione necessario aumenta drasticamente.

Concludendo questo esempio possiamo dire che con una temperatura esterna di 40 °C:

Irraggiamento e Convezione si invertono: Invece di raffreddare il corpo, lo riscaldano.

L'evaporazione è l'unico strumento di raffreddamento: Il corpo si affida interamente alla sudorazione.

L'umidità diventa critica: Se l'umidità dell'aria è alta, l'evaporazione del sudore è più difficile. Questo è il motivo per cui 40°C in un clima secco (es. deserto) sono più sopportabili di 35°C in un clima umido (es. foresta tropicale). Quando l'evaporazione fallisce, si va incontro al colpo di calore, ed in casi estremi alla morte.

La valvola di sicurezza del nostro corpo: il Termine di Accumulo

Il termine di accumulo è la nostra batteria termica. È la capacità del corpo di "assorbire" un eccesso di calore o di "cedere" energia dalle sue riserve quando fa freddo.

Questa batteria non è infinita. La sua capacità massima è di circa ± 600 kJ.

Scenario "Colpo di Freddo": Immaginate di perdervi in montagna di notte. La temperatura crolla. Il vostro corpo inizia a "spendere" l'energia accumulata per mantenere gli organi vitali caldi. Brucia le sue riserve (-600 kJ). Se questa energia si esaurisce, il corpo va in crisi: sospende la circolazione a mani e piedi (che diventano insensibili) e, nei casi estremi, si arriva all'ipotermia, alla necrosi dei tessuti e alla morte.

Scenario "Congestione": Vi tuffate in acqua gelida dopo aver preso il sole per ore. La nuca, dove si trova il nostro "termostato" (l'ipotalamo), subisce uno shock termico. Il termostato crede che tutto il corpo sia in ipotermia e lancia l'allarme: blocca la digestione, restringe i vasi sanguigni periferici e può causare uno shock. È un "falso allarme" del nostro sistema di sensori, con conseguenze potenzialmente gravi.

Il metabolismo è l'input primario del termine di accumulo. La capacità termica totale che l'organismo può sopportare, ovvero la massima dose di energia che l'organismo può temporaneamente mettere a disposizione in caso di freddo o di caldo è pari circa a ± 600 kJ. Il termine U costituisce la "valvola di sicurezza" del sistema nel momento in cui condizioni ambientali particolarmente severe non consentano all'organismo umano di far fronte alle esigenze energetiche con i mezzi usualmente utilizzati allo scopo. In condizioni transitorie il termine di accumulo diviene particolarmente importante e permette all'organismo umano di resistere a condizioni ambientali gravose. Scompensi dell'ordine di 600 kJ costituiscono i valori limite dell'elasticità energetica dell'organismo umano, al di là dei quali difficilmente la vita è in grado di riprendere il suo ritmo normale. Per una variazione in negativo maggiore di 600 kJ si verifica il cosiddetto "colpo di freddo", cioè si ha un significativo abbassamento della temperatura corporea, un grave deficit di energia, che l'organismo cerca di compensare attraverso la sospensione di alcuni servizi considerati non essenziali. Se un individuo si espone per pochi istanti a condizioni ambientali estremamente rigide, l'organismo non fa in tempo ad erogare la quota di energia che scatena questi meccanismi fisiologici (ad esempio il cosiddetto "blocco di digestione"), ma se la permanenza in queste condizioni sfavorevoli viene prolungata, l'organismo è costretto ad interrompere alcune funzioni come la circolazione sanguigna negli arti estremi, non considerati indispensabili per la sopravvivenza generale del corpo umano. Questi processi di raffreddamento estremo provocano conseguenze gravi (si verifica quel complesso di alterazioni strutturali irreversibili, detto necrosi, che ha per conseguenza la morte di cellule o di tessuti dell'organismo).

A causa della particolare posizione che il centro termoregolatore occupa all'interno del corpo umano, la percezione dell'organismo può essere facilmente ingannata: un improvviso raffreddamento della nuca, zona in cui risiede l'ipotalamo, può produrre l'erronea valutazione di un gravissimo raffreddamento del corpo, anche se l'organismo non è realmente in deficit di energia.

Questo fenomeno si verifica tipicamente quando un individuo si tuffa in una piscina gelata, dopo essere stato lungamente esposto al sole: il centro termoregolatore è improvvisamente raffreddato e immediatamente vengono sospese le attività digestive, la circolazione negli organi periferici (le mani ad esempio perdono sensibilità e la capacità di nuotare o attaccarsi agli appigli); addirittura si può verificare un blocco respiratorio o cardiaco.

Il corpo umano non è una macchina perfetta: come tutti i sistemi dotati di sensoristica è molto sensibile alle azioni dirette sui sensori, che possono facilmente portare a errori di valutazione. (Per impedire i casi di congestione sarebbe opportuno proteggere la nuca con un cappuccio di neoprene, in modo tale da difendere il centro termoregolatore da bruschi sbalzi di temperatura).

Esempi di Utilizzo dell'Accumulo

Situazione di freddo intenso:

Temperatura esterna: -20°C

Dispersione extra: $200 \text{ W/m}^2 \cdot 2 \text{ m}^2 = 400 \text{ W}$

Durata massima sopportabile: $t = \text{Energia}/\text{Potenza} = 600,000 \text{ J} / 400 \text{ W} \approx 25 \text{ minuti}$

Situazione di caldo intenso:

Temperatura esterna: 45°C , umidità 90%

Impossibilità di sudorazione efficace

Accumulo di calore: $150 \text{ W per } 1 \text{ ora} = 540 \text{ kJ}$ (vicino al limite!)

Durata massima sopportabile: $t \approx 1 \text{ ora}$

Conclusioni

● Irraggiamento

Domina a basse temperature: oltre **360 W** a **0 °C**.

Decresce rapidamente con l'aumento della temperatura ambiente.

Si azzerava verso i **37 °C**.

● Convezione naturale

Proporzionale alla differenza $T_{\text{corpo}} - T_{\text{amb}}$.

Si aggira attorno ai **60–100 W** per temperature ambiente comuni.

Molto influenzata dal **movimento d'aria** (vento → convezione forzata).

● Conduzione

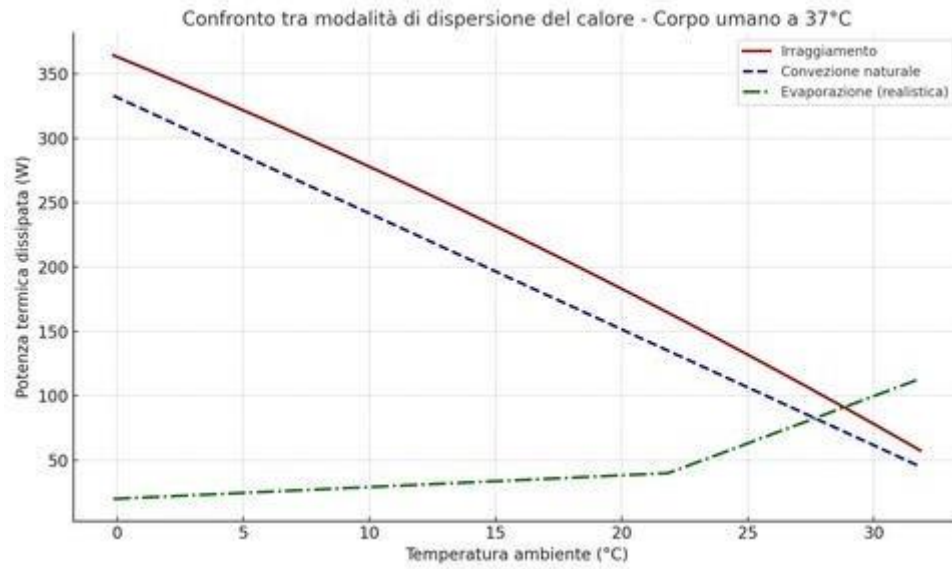
Trasferimento di calore per contatto diretto con superfici solide (es. acqua, terra, metallo, abbigliamento).

In aria, il contributo è in genere trascurabile (<5 W) a meno di contatti prolungati.

Può diventare molto rilevante in acqua fredda o su superfici ad alta conducibilità termica.

● Evaporazione (costante ~25 W)

- Presente anche a riposo, indipendente dalla temperatura ambiente (fino a ~35 °C).
- Diventa il principale meccanismo quando l'ambiente è caldo (oltre i 30 °C) in quanto gli altri meccanismi di dispersione non sono più sufficienti.
- Può arrivare a 60 W durante sudorazione intensa (esercizio fisico, caldo estremo).
- Nel seguente grafico mostrato l'andamento delle varie modalità di dispersione del calore, ad eccezione della conduzione in quanto trascurabile.



Variazione delle riserve energetiche (ΔS)

Riprendiamo la relazione (5)

$$\Delta S = E_{in} - E_{out}$$

Il termine (Δ) indica la variazione delle scorte (S) energetiche del corpo, principalmente sotto forma di:

- grasso corporeo
- glicogeno (*)
- massa muscolare (in certi casi, ad esempio in ipercatabolismo)

In pratica se $E_{in} > E_{out}$ allora ΔS è positivo e si ha un accumulo di riserve energetiche

se $E_{in} < E_{out}$ allora ΔS è negativo e si ha un consumo di riserve energetiche

se $E_{in} = E_{out}$ allora ΔS è nullo e la situazione è stabile.

$$\Delta S > 0$$

L'energia in eccesso viene immagazzinata sotto forma di massa (principalmente grasso, ma in certi casi anche glicogeno e un po' di massa muscolare).

Se il surplus è moderato e costante → aumento di peso nel tempo.

Se il surplus è elevato → accumulo più rapido di tessuto adiposo.

$$\Delta S < 0$$

Se invece l'energia richiesta supera quella fornita dagli alimenti il corpo deve compensare attingendo alle riserve interne:

Grasso corporeo → principale "banca energetica" (trigliceridi).

Glicogeno nei muscoli e nel fegato → usato nelle prime ore di deficit.

Proteine muscolari (in caso di deficit prolungato o molto marcato) → degradate in aminoacidi e convertite in energia via gluconeogenesi.

Effetti fisiologici principali:

Perdita di peso (prevalentemente massa grassa, ma anche massa magra se il deficit è grande o la dieta è sbilanciata).

Se il deficit è lieve e ben gestito → il corpo adatta il metabolismo senza grossi danni.

Se è forte e prolungato → calo del metabolismo basale, perdita muscolare, possibili carenze nutrizionali.

(*) Il glicogeno è un polisaccaride di riserva formato da tante molecole di glucosio collegate tra loro, conservato soprattutto:

- Nel fegato (~120 g in un adulto medio) → serve a mantenere la glicemia costante per tutto il corpo.
- Nei muscoli (~500 g totali) → usato localmente come carburante per la contrazione muscolare.

Cosa succede in deficit energetico

1. Prime ore di digiuno o deficit → il corpo consuma il glicogeno epatico per mantenere la glicemia.
2. Durante attività fisica → i muscoli usano il loro glicogeno per produrre ATP, specialmente in esercizi ad alta intensità.
3. Quando le scorte scendono molto, il corpo inizia a:
 - aumentare la mobilizzazione dei grassi (lipolisi);
 - attivare la gluconeogenesi (produzione di glucosio da aminoacidi, glicerolo, lattato).

Capacità energetica del glicogeno

1 g di glicogeno → ~4 kcal (circa 17 kJ)

Totale scorte corporee: 400–600 g → 1600–2400 kcal totali

Si esauriscono in circa 24 ore di digiuno o in poche ore di esercizio intenso.

Esempi numerici

Esempio 1) Calcolo del Metabolismo Basale (BMR) e totale (TDEE)

Soggetto: Donna, 30 anni, 65 kg, 170 cm, moderatamente attiva

Calcolo del BMR (Mifflin-St Jeor): $BMR = 10 \cdot \text{peso (kg)} + 6.25 \cdot \text{altezza (cm)} - 5 \cdot \text{età (anni)} - 161$

$BMR = (10 \cdot 65) + (6,25 \cdot 170) - (5 \cdot 30) - 161$
 $BMR = 650 + 1062,5 - 150 - 161 = 1401,5$
kcal/giorno

Calcolo del TDEE (metabolismo totale):

$TDEE = BMR \cdot F$ (dove F è il fattore di attività, come visto nel paragrafo sul metabolismo totale)

$TDEE = BMR \cdot 1,55 = 1401,5 \cdot 1,55 = 2172$ kcal/giorno

Distribuzione del dispendio:

BMR: 1400 kcal (64,5%)

TEF: 200 kcal (10%)

Attività: 550 kcal (25,5%)

Esempio 2) Pianificazione di una Dieta

Calcolare di quante kcal si deve ridurre una dieta per dimagrire 0,5 kg/settimana.

Siccome quando si crea un deficit alimentare la prima cosa che il corpo fa è attingere alle riserve energetiche di grasso, partiamo dal considerare che 1 kg di grasso corporeo equivale a circa 7.700 kcal, quindi per perdere 0,5 kg di grasso in una settimana è necessario creare un deficit totale di circa 3.850 kcal, cioè circa 500 kcal al giorno.

Nel caso di una dieta di partenza di 2170 kcal al giorno essa andrà portata a $2170 - 500 = 1670$ kcal, che potrebbe equilibrata nel seguente modo:

Proteine (25%): 100 g

Carboidrati (45%): 182 g

Grassi (30%): 54 g

Abbiamo descritto il caso in cui si volesse dimagrire puntando solo in una diminuzione di input calorico, se invece si volesse agire anche sul fronte di un aumento del dispendio energetico, si potrebbe programmare ad esempio

- una diminuzione di introito calorico di 250 kcal
- un aumento di dispendio di 250 kcal.

Attività fisica per “bruciare” 250 kcal

Camminata veloce (6 km/h) per 45 min

Ciclismo moderato (20 km/h) per 30 min

Nuoto moderato per 30 min

Fitness/Aerobica per 30 min

La restante quota di 250 kcal va scalata dall'apporto della dieta

Questa tabella permette di vedere a colpo d'occhio quante calorie contengono i cibi più comuni, permettendo così di agire sulla propria dieta per diminuirla dei 250 kcal del nostro esempio.

Tabella calorie per 100g di alimenti comuni

<i>Categoria</i>	<i>Alimento</i>	<i>Calorie (kcal)</i>	<i>Note</i>
<i>Carboidrati</i>	Pasta di semola	360	Peso a crudo
	Riso bianco	360	Peso a crudo
	Pane bianco	265	
	Patate	80	Peso a crudo
	Fette biscottate	410	
<i>Proteine</i>	Petto di pollo	110	Crudo, senza pelle
	Carne di manzo magra	140	Cruda
	Salmone fresco	200	Crudo
	Uova	155	Circa 2 uova grandi
	Tonno al naturale	115	Sgocciolato
<i>Latticini</i>	Latte intero	65	
	Yogurt greco 0% grassi	59	
	Parmigiano Reggiano	430	
	Mozzarella di vacca	280	
<i>Frutta</i>	Mela	52	
	Banana	89	
	Arancia	47	
	Fragole	32	
<i>Verdura</i>	Lattuga	15	
	Pomodori	18	
	Carote	41	
	Zucchine	17	
<i>Condimenti</i>	Olio evo	900	
	Burro	720	
<i>Frutta secca</i>	Mandorle	580	
	Noci	650	
	Pistacchi	560	
	Arachidi	600	
<i>Dolci e Snack</i>	Cioccolato fondente	550	
	Cioccolato al latte	535	
	Cornetto (vuoto)	450	
	Gelato alla crema	400	
	Miele	300	
	Zucchero (bianco/canna)	400	
<i>Bevande</i>	Vino rosso	85	
	Bibita zuccherata	40	

E' possibile — in linea teorica — creare un “deficit” di 500 kcal solo aumentando il dispendio energetico tramite attività fisica, senza modificare la dieta.

Camminata veloce (6 km/h) per 1.5 ore

Corsa (10 km/h) 45 min

Ciclismo moderato (20 km/h) per 1 ora

Nuoto moderato per 1 ora

Fitness/Aerobica per 1 ora

Perché “in linea teorica? Perché nella pratica, il corpo non è una calcolatrice perfetta:

Adattamenti metabolici: se si aumenta di tanto l'attività fisica, il metabolismo basale può ridursi leggermente per compensare.

Compensazione comportamentale: a volte, senza accorgersi, ci si muove di meno nel resto della giornata, ad es. dopo un allenamento impegnativo si passa più tempo stando seduti.

Fame eccessiva: l'esercizio intenso può aumentare l'appetito, e se mangi di più annulli il deficit.

Variabilità individuale: età, sesso, massa muscolare e livello di allenamento influenzano quante calorie bruci davvero.

Quindi “in linea teorica” funziona benissimo, ma nella realtà i risultati possono differire e serve un minimo di strategia per evitare che il corpo “recuperi” le energie spese con l'aumento dell'attività fisica.

N.B.

Abbiamo parlato quasi esclusivamente di grasso per un motivo fondamentale: in un percorso di dimagrimento sano e sostenibile, l'obiettivo primario è massimizzare la perdita di massa grassa e ridurre al minimo la perdita di massa magra (principalmente muscoli).

Quando si perde peso, non si perde solamente grasso. Il peso che si vede scendere sulla bilancia è una combinazione di:

Grasso (massa grassa): è il tessuto adiposo, la principale riserva di energia del corpo. Questo è ciò che si vuole ridurre per migliorare la salute e la composizione corporea. È molto denso di energia: 1 kg di tessuto adiposo contiene circa 7.700 kcal.

Acqua: Soprattutto nelle prime settimane di una dieta, una parte significativa del peso perso è costituita da liquidi. Questo accade perché il corpo utilizza le sue riserve di glicogeno (zuccheri immagazzinati nei muscoli e nel fegato). Ogni grammo di glicogeno è legato a circa 3-4 grammi di acqua. Quando il glicogeno viene consumato, l'acqua viene espulsa.

Massa Magra (incluso il muscolo): Questa è la componente che si vuole preservare a tutti i costi. Una perdita significativa di massa muscolare è controproducente perché:

Abbassa il metabolismo: i muscoli bruciano più calorie a riposo rispetto al grasso. Perderli rende più difficile continuare a dimagrire e più facile recuperare peso in futuro (il cosiddetto "effetto yo-yo").

Peggiora la forma fisica: Si perde tono, forza e funzionalità.

Il calcolo standard di "un deficit di 3.500 kcal per perdere 0,5 kg" si basa sull'energia contenuta prevalentemente nel tessuto grasso. Si usa come punto di riferimento perché:

È l'obiettivo desiderabile: la finalità della dieta è perdere grasso.

È un modello pratico: fornisce una stima semplice e funzionale per impostare un piano alimentare.

Promuove un approccio sano: Un deficit moderato di 500 kcal al giorno, abbinato a un'adeguata assunzione di proteine e a un po' di attività fisica, aiuta a indirizzare il corpo a bruciare le riserve di grasso piuttosto che a "cannibalizzare" i muscoli per ottenere energia.

Osservazione

- **Il Glicogeno è il "Portafoglio":** Contiene energia di pronto utilizzo, facilmente accessibile, ma in quantità limitata.
- **Il Grasso è il "Conto di Risparmio":** Contiene un'enorme riserva di energia, ma è più lento e complesso da prelevare.

Ecco cosa succede nel dettaglio quando inizi a ridurre le calorie.

Fase 1: Consumo del Glicogeno (Le prime ore / I primi giorni)

1. **Bisogno Immediato di Energia:** Appena crei un deficit calorico, il tuo corpo ha bisogno di energia per le sue funzioni base e per le tue attività. La prima fonte, la più rapida e comoda, è il glucosio che circola nel sangue.
2. **Accesso al "Portafoglio":** Esaurito il glucosio disponibile, il corpo si rivolge alle sue scorte di glicogeno immagazzinate nel fegato e nei muscoli. Le scompone rapidamente per rilasciare glucosio e produrre energia.
3. **La Perdita di Acqua:** Questo è un punto cruciale. Ogni grammo di glicogeno è legato a circa 3-4 grammi di acqua. Quando bruci glicogeno, liberi e elimini anche quest'acqua. **Questo è il motivo per cui nei primi giorni di dieta si assiste spesso a una perdita di peso molto rapida e significativa:** è in gran parte acqua, non ancora grasso.

Fase 2: Consumo del Grasso (Il dimagrimento reale e sostenibile)

1. **Le Scorte di Glicogeno si Riducono:** Le riserve di glicogeno non sono infinite. Dopo circa 24-48 ore di deficit calorico, pur non esaurendosi mai del tutto, si riducono a un livello tale che il corpo deve necessariamente attingere in modo più massiccio al suo "conto di risparmio".
2. **Attivazione della Lipolisi:** Il corpo inizia a scomporre i trigliceridi immagazzinati nelle cellule adipose (il nostro grasso corporeo) in acidi grassi. Questi acidi grassi vengono rilasciati nel sangue e trasportati ai muscoli e ad altri tessuti per essere usati come fonte di energia.
3. **Perdita di Grasso Reale:** Questo processo è più lento ma molto più potente, data l'enorme quantità di energia immagazzinata nel grasso. La perdita di peso diventa più lenta e graduale (come l'obiettivo di 0,5 kg a settimana), ma **ora stai perdendo prevalentemente massa grassa**, che è l'obiettivo finale.

Esempio 3) Calcolo del Dispendio per Attività

Attività: Corsa a 12 km/h per 45 minuti Soggetto: Uomo, 80 kg

Calcolo del dispendio:

MET per corsa a 12 km/h = 12,8 Dispendio/min = $12,8 \cdot 3,5 \cdot 80 / 200 = 17,92$ kcal/min

Dispendio totale = $17,92 \cdot 45 = 806$ kcal

Comparazione con altri macronutrienti:

- Equivale a 90 g di grassi
- Equivale a 201 g di carboidrati
- Equivale a 201 g di proteine

Esempio 4) Effetto del Clima sulla Termoregolazione

Condizioni: Temperatura 35°C, umidità 70%, attività moderata

Calcolo della perdita di calore per evaporazione:

Produzione di calore = 400 kcal/h = 465 W Efficienza sudorazione = $1 - 0,70 = 0,30$ Sudore necessario = $465 \text{ W} / (0,30 \times 680 \text{ W/L}) = 2,3 \text{ L/h}$

Fabbisogno idrico:

Fabbisogno totale = $2,3 \text{ L/h} + 0,5 \text{ L/h}$ (perdite basali) = 2,8 L/h

Conclusioni

Il bilancio energetico del corpo umano rappresenta un sistema complesso e dinamico governato da principi termodinamici fondamentali ma influenzato da numerosi fattori biologici, ambientali e comportamentali. La comprensione quantitativa di questi meccanismi è essenziale per applicazioni pratiche in ambito clinico, nutrizionale e sportivo.

L'analisi dei dati presentati evidenzia come il metabolismo basale rappresenti la componente principale del dispendio energetico totale, costituendo circa il 60-70% del fabbisogno calorico giornaliero in individui sedentari. Tuttavia, la variabilità inter-individuale è significativa e può raggiungere il 20-30%, rendendo necessario un approccio personalizzato nel calcolo del fabbisogno energetico.

Le equazioni predittive del metabolismo basale, sebbene utili nella pratica clinica, presentano limiti di accuratezza che possono essere significativi a livello individuale. L'equazione di Mifflin-St Jeor risulta generalmente più accurata rispetto a quella di Harris-Benedict, ma entrambe possono sottostimare o sovrastimare il metabolismo reale fino al 10-20%.

La termoregolazione rappresenta un aspetto cruciale del bilancio energetico, particolarmente in condizioni ambientali estreme o durante l'attività fisica intensa. La capacità di produrre e dissipare calore influenza significativamente il dispendio energetico e può richiedere adattamenti nutrizionali e idrici specifici.

La relazione tra bilancio energetico e peso corporeo, sebbene concettualmente semplice, è complicata dagli adattamenti metabolici che si verificano durante la perdita o l'aumento di peso. La classica regola delle 3500 kcal per kg di peso può essere imprecisa nel lungo termine a causa di questi adattamenti.

Gli esempi numerici presentati dimostrano l'importanza di un approccio quantitativo nella valutazione del bilancio energetico, fornendo strumenti pratici per la pianificazione nutrizionale e la gestione del peso corporeo. Tuttavia, è fondamentale considerare la variabilità individuale e monitorare costantemente la risposta del soggetto agli interventi implementati.

In conclusione, il bilancio energetico del corpo umano rimane un campo di ricerca attivo, con continue evoluzioni nella comprensione dei meccanismi molecolari e fisiologici coinvolti. L'integrazione di approcci quantitativi con tecnologie avanzate di monitoraggio prometterà ulteriori progressi nella personalizzazione degli interventi nutrizionali e nell'ottimizzazione della salute metabolica.

Prospettive Future

Le prospettive future nella ricerca sul bilancio energetico includono:

1. Personalizzazione genetica: Sviluppo di algoritmi che incorporino profili genetici per predire il metabolismo individuale
 2. Tecnologie wearable: Miglioramento dei dispositivi per il monitoraggio continuo del dispendio energetico
 3. Intelligenza artificiale: Applicazione di algoritmi di machine learning per ottimizzare la predizione del bilancio energetico
 4. Microbioma intestinale: Comprensione del ruolo del microbiota nella regolazione del metabolismo energetico.
-

Bibliografia Essenziale

1. Brooks GA, Fahey TD, Baldwin KM. Exercise Physiology: Human Bioenergetics and Its Applications. 4th ed. McGraw-Hill; 2005.
 2. Levine JA. Measurement of energy expenditure. Public Health Nutr. 2005;8(7A):1123-1132.
 3. Mifflin MD, St Jeor ST, Hill LA, et al. A new predictive equation for resting energy expenditure in healthy individuals. Am J Clin Nutr. 1990;51(2):241-247.
 4. Hall KD, Heymsfield SB, Kemnitz JW, et al. Energy balance and its components: implications for body weight regulation. Am J Clin Nutr. 2012;95(4):989-994.
 5. Rosenbaum M, Leibel RL. Adaptive thermogenesis in humans. Int J Obes. 2010;34 Suppl 1:S47-55.
-

Perché in estate fa più caldo che in inverno?

a cura di Giancarlo Buccella

La variazione dell'intensità luminosa che arriva dal Sole sulla Terra è dovuta a due fattori: alla variazione della distanza della Terra dal Sole e dal variare dell'angolo di incidenza dei raggi sulla superficie terrestre.

Premessa: legge del quadrato della distanza.

Supponiamo di avere una certa sorgente luminosa (una candela, una lampadina, il Sole...) è intuitivo pensare che la sua “potenza luminosa”, ossia l’energia che emette nell’unità di tempo (che si misura in watt) si distribuisca uniformemente nello spazio e cioè ad una particolare distanza R, sulla superficie di una sfera di raggio R, e questa “distribuzione di energia” viene descritta dalla grandezza “intensità” che quindi si misura in W/m^2 .

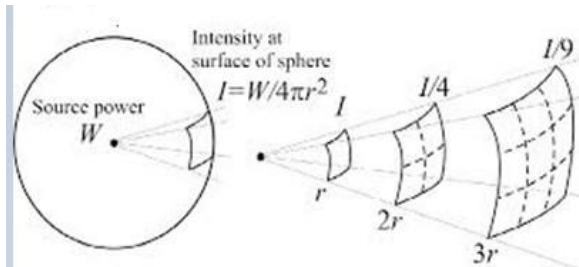
In particolare conoscendo la potenza emissiva del Sole sarà possibile ricavare l’intensità che arriva alla distanza della Terra.

Infatti si ha che l’intensità luminosa di una sorgente diminuisce con la distanza semplicemente con la legge dell’inverso del quadrato della distanza

$$I = \frac{P_0}{4\pi R^2}$$

dove P_0 è una costante (ossia il valore della potenza luminosa emessa dalla sorgente) ed R è la distanza.

Questa formula non ci dice nient’altro che (ricordando che l’area della superficie di una sfera di raggio R è $4\pi R^2$) la potenza emissiva della sorgente luminosa si spande sulla superficie di una sfera che dista R dalla sorgente stessa.



- P_0 è la luminosità intrinseca del Sole (potenza totale emessa, in watt) $P_0 = 3.828 \cdot 10^{26} W$
- R è la distanza media tra la Terra e il Sole (circa $1,496 \times 10^{11} m$)

$$I_s = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.496 \cdot 10^{11})^2} = 1360 W / m^2$$

(Il valore medio più recente misurato dai satelliti è di $1367 W/m^2$)

Questa intensità è chiamata costante solare e rappresenta l'intensità media della radiazione solare (che incida perpendicolarmente sull'unità di superficie) appena fuori dall'atmosfera terrestre.

In Italia al suolo in estate con il sole allo zenit è di circa 1000 W/m^2 .

Variazione dovuta alla distanza Terra-Sole

Nel calcolo precedente avevamo assunto come distanza Terra-Sole il valore medio, ora invece dobbiamo calcolare come varia l'intensità con il variare della distanza, sapendo che tale variazione è di circa 5 milioni di chilometri.



I valori delle distanze Terra-Sole sono:

$$R_{\text{estate}} = 152 \text{ milioni di chilometri} = 1.526 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$R_{\text{inverno}} = 147 \text{ milioni di chilometri} = 1.475 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$I_{\text{ESTATE}} = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.526 \cdot 10^{11})^2} = 1309 \text{ W / m}^2$$

$$I_{\text{INVERNO}} = \frac{3.828 \cdot 10^{26}}{4\pi (1.475 \cdot 10^{11})^2} = 1400 \text{ W / m}^2$$

La variazione dell'intensità dovuta solamente alla distanza è di circa 100 W/m^2

Quindi se questo fosse l'unico fattore per descrivere la situazione dovrebbe far caldo più in inverno che in estate, ma c'è anche un altro fattore che influenza il valore dell'intensità ed è l'inclinazione dei raggi rispetto alla superficie terrestre.

Variazione dovuta al variare dell'angolo di incidenza

Premessa

Quando una radiazione luminosa di intensità I incide su una superficie inclinata, l'intensità della radiazione che colpisce effettivamente la superficie è influenzata dall'angolo di incidenza θ (l'angolo tra la direzione della radiazione e la normale alla superficie).

Il valore dell'intensità effettiva della radiazione che incide perpendicolarmente alla superficie inclinata si calcola come:

$$I = I_0 \cos\theta$$

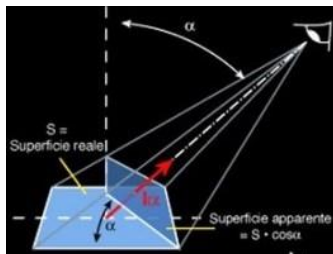
- I_0 è l'intensità della radiazione incidente (lungo la direzione della radiazione),
- θ è l'angolo tra la direzione della radiazione e la normale alla superficie.

Considerando l'intensità della radiazione solare al limite dell'atmosfera terrestre, come abbiamo visto:

$I = 1360 \text{ W/m}^2$ ed è immediata la verifica della formula precedente, infatti essendo l'angolo di incidenza pari a zero si ha

$$I = I_s \cos 0^\circ = I_s = 1360 \text{ W / m}^2 \text{ (essendo } \cos 0^\circ = 1)$$

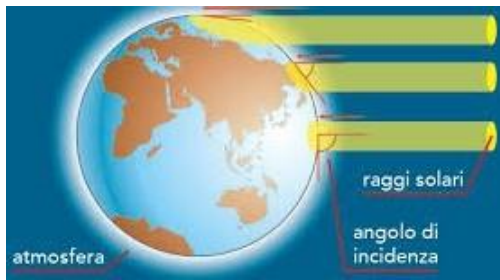
Nel caso invece la superficie che intercetta la radiazione è inclinata di un certo angolo rispetto alla perpendicolare è intuitivo pensare che l'intensità diffondendosi su una superficie più ampia rispetto alla precedente avrà un valore (per unità di area) inferiore, ed è la funzione coseno che ci rende conto di tale diminuzione.



$$\text{Incidenza perpendicolare: Angolo } 0^\circ \quad \cos 0^\circ = 1 \quad I = I_s \cos 0^\circ = I_s \cdot 1 = 1360 \text{ W / m}^2$$

$$\text{Incidenza parallela: Angolo } 90^\circ \quad \cos 90^\circ = 0 \quad I = I_s \cos 90^\circ = I_s \cdot 0 = 0 \text{ W / m}^2$$

L'unico parametro ai fini del calcolo dell'intensità è dato dall'angolo di incidenza θ , che ripetiamolo è l'angolo fra la direzione dei raggi solari (che supponiamo arrivino tutti paralleli fra loro a causa della grande distanza dalla sorgente) e la perpendicolare alla superficie di incidenza, ossia al piano tangente alla superficie terrestre in un dato punto.



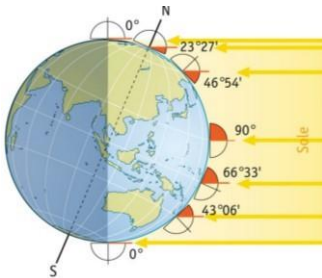
Per trovare l'angolo θ , possiamo usare la seguente formula:

$$\theta = \lambda - \delta$$

dove λ è l'angolo della latitudine del luogo considerato (Roma: $\lambda = 41^\circ 54'$), mentre δ è la **declinazione solare**, un angolo che varia con le stagioni secondo l'inclinazione della Terra.

[La declinazione solare (δ) è l'angolo formato dalla direzione dei raggi solari sul meridiano considerato con il piano equatoriale terrestre. Essa varia durante l'anno a causa dell'inclinazione dell'asse terrestre e non dipende dalla latitudine ma solo del giorno dell'anno considerato ed è la stessa per tutti i punti lungo il meridiano.]

Ad esempio nel solstizio d'estate i raggi solari incidono perpendicolarmente al parallelo del tropico del cancro (vedi figura), mentre al solstizio d'inverno sono perpendicolari al tropico del capricorno; mentre nell'equinozio di primavera ed autunno sono perpendicolari all'equatore.



I valori di δ in gradi sono circa:

- Solstizio d'inverno (21 dicembre): $\delta = -23,5^\circ$
- Equinozio di primavera (21 marzo): $\delta = 0^\circ$
- Solstizio d'estate (21 giugno): $\delta = +23,5^\circ$
- Equinozio d'autunno (23 settembre): $\delta = 0^\circ$

Calcoliamo come varia l'intensità ad Alanno considerando solo l'aspetto dell'inclinazione dei raggi.

$$\text{Latitudine Roma } \lambda = 41^\circ 54' \quad \delta_{\text{INVERNO}} = -23,5^\circ \quad \delta_{\text{ESATAE}} = 23,5^\circ$$

$$I_{\text{INVERNO}} = I_s \cos \theta = I_s \cos(\lambda - \delta) = 1360 \cos(41^\circ 54' - (-23^\circ)) = 1360 \cos 65^\circ = 577 \text{ W} / \text{m}^2$$

$$I_{\text{ESTATE}} = I_s \cos \theta = I_s \cos(\lambda - \delta) = 1360 \cos(41^\circ 54' - 23^\circ) = 1360 \cos 65^\circ = 1287 \text{ W} / \text{m}^2$$

La variazione dovuta solo alla variazione dell'angolo di incidenza circa 700 W/m^2

Quindi la principale variazione dell'irraggiamento solare è dovuta alla variazione dell'angolo di incidenza dei raggi solari sulla superficie terrestre nei vari periodi dell'anno.

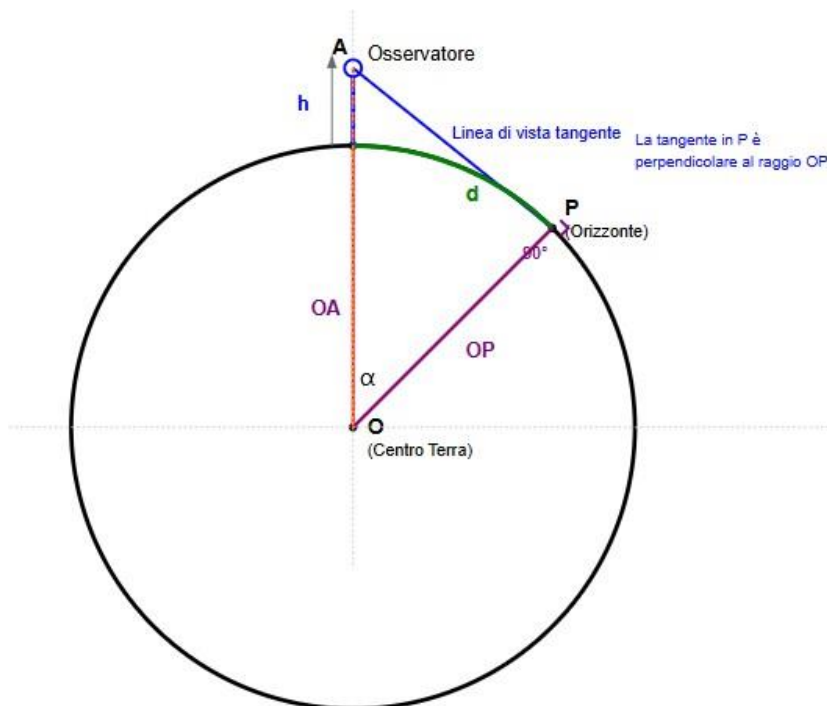
Concludendo facendo riferimento a Roma, fra estate e inverno, si ha una variazione negativa di 100 W/m^2 dovuta alla distanza, mentre si ha una variazione positiva di 700 W/m^2 , dovuta all'inclinazione, quindi si ha un **saldo positivo di 600 W/m^2 a favore dell'estate**. Ecco perché in estate fa più caldo che in inverno.

Calcolo dell'abbassamento della linea di visuale

a cura di Giancarlo Buccella

La sensazione comune che la Terra sia piatta è una percezione ingannevole dovuta alle nostre dimensioni molto piccole rispetto al pianeta. In realtà, la sua forma sferica ha un effetto tangibile e calcolabile su ciò che possiamo vedere: l'orizzonte non è infinito, (l'orizzonte geometrico è la linea creata dai punti in cui la tua linea di vista è tangente alla superficie terrestre), ma una linea che si abbassa progressivamente a causa della curvatura terrestre. Questo fenomeno, noto fin dall'antichità, può essere compreso e quantificato attraverso semplici principi geometrici.

Per calcolare di quanto la curvatura terrestre abbassi la nostra visuale, possiamo immaginare la Terra come una sfera perfetta. Il nostro punto di osservazione, la linea dell'orizzonte e il centro della Terra formano un triangolo rettangolo. La distanza dall'osservatore all'orizzonte (la luce viaggia in linea retta) e il raggio terrestre sono i due cateti, mentre l'ipotenusa è data dal raggio terrestre sommato all'altezza dell'osservatore.



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAP, possiamo derivare una formula per calcolare la distanza dell'orizzonte.

$$(OA)^2 = OP^2 + AP^2$$

Essendo: $OA = R + h$, $OP = R$, $AP = R \operatorname{tg} \alpha$, si ha

$$(R + h)^2 = R^2 + (R \operatorname{tg} \alpha)^2$$

Per piccoli angoli è lecito approssimare (vedi sotto) la tangente con l'angolo $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$

$$(R + h)^2 = R^2 + (R \alpha)^2$$

Indicando con d la lunghezza dell'arco $R \alpha$

$$d^2 = (R + h)^2 - R^2 = R^2 + 2hR + h^2 - R^2 \approx 2hR$$

$$d = \sqrt{2hR + h^2}$$

Questa è la formula esatta della distanza dell'orizzonte dall'osservatore alto h su superficie piana.

Quando $h \ll R$, ossia quando l'altezza è piccola rispetto al raggio terrestre (cioè quello che accade nei casi concreti) il termine h^2 diventa trascurabile. Ad esempio con $h = 100$ m ed $R = 6\,371\,000$ m
 $2hR = 1.2742 \cdot 10^9$

$$h^2 = 10^4$$

Il valore di h^2 è circa un milionesimo del termine $2hR$, quindi completamente trascurabile. Allora tenendo presente questa approssimazione la relazione diventa

$$d = \sqrt{2hR}$$

Questa formula approssimata è la più comunemente usata per il calcolo della distanza dell'orizzonte vista da un'altezza h , ossia la lunghezza della linea che va dall'osservatore al punto di tangenza.

Collegato a questo parametro c'è il concetto di "abbassamento della linea di visuale", che è altezza (o l'angolo) con cui la linea di tangenza si "abbassa" rispetto alla orizzontale geometrica.

- **Abbassamento della linea di visuale (h):** è l'altezza (o l'angolo) con cui la linea tangente alla Terra si "abbassa" rispetto all'orizzontale geometrica. In pratica: quanto alto dista la linea tangente al punto di osservazione, rispetto al suolo, nel punto in cui è posto l'osservatore (è il segmento h mostrato nella figura precedente).
- **Distanza dell'orizzonte (d):** è la distanza lungo la superficie terrestre (o "a vista" in linea retta) tra l'osservatore e il punto più lontano che può vedere prima che la curvatura della Terra gli nasconda tutto. Dipende dall'altezza dell'osservatore rispetto al suolo.

Ovviamente l'abbassamento della linea di visuale h si ricava immediatamente dalla relazione precedente.

$$h = \frac{d^2}{2R}$$

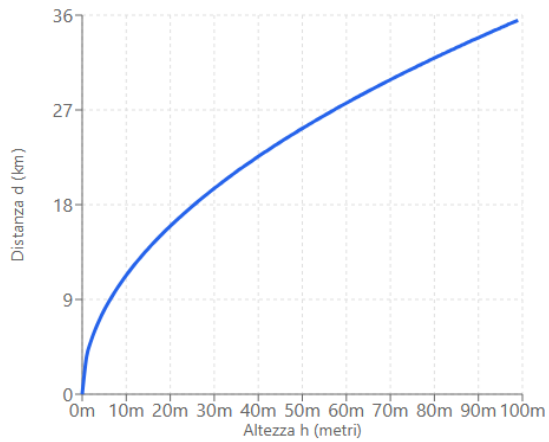
Ai fini dei calcoli possiamo usare più agevolmente le seguenti relazioni in cui il fattore 2R è esplicitato nel suo valore numerico.

$$\text{Distanza dell'orizzonte:} \quad d \text{ (km)} = 112.88 \sqrt{h \text{ (km)}}$$

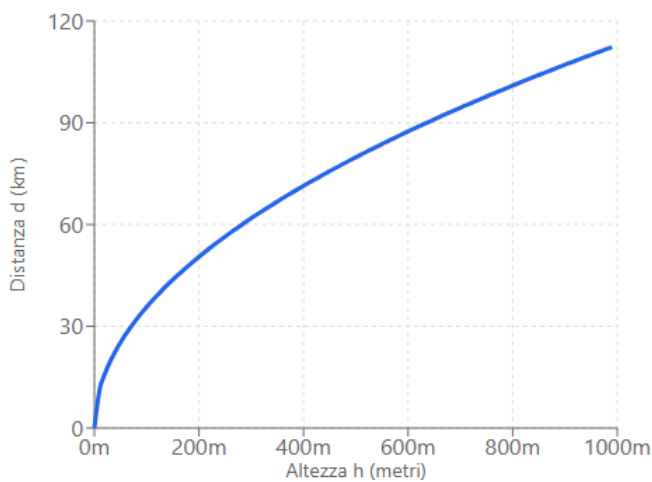
$$\text{Abbassamento della linea di visuale:} \quad h \text{ (km)} = \frac{d^2 \text{ (km)}}{12742}$$

Grafichiamo l'andamento della distanza dell'orizzonte, che per maggiore chiarezza abbiamo diviso in tre grafici.

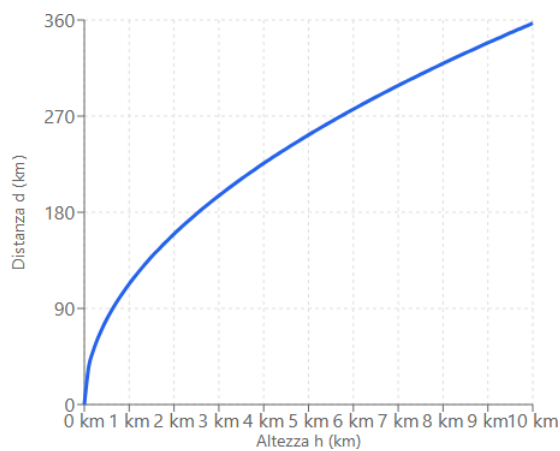
- h fino a 100 m



- h fino a 1 km



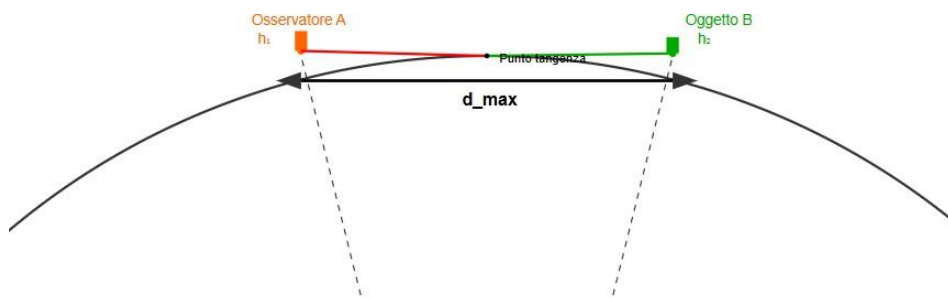
- h fino a 10 km



Ma attenzione, la distanza dell'orizzonte non è coincide con la distanza massima per vedere un oggetto, per quella serve considerare anche l'altezza dell'oggetto stesso. Infatti la distanza massima osservabile tra due oggetti è la somma dei due orizzonti,

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

come si vede dall'immagine seguente.



Formula della distanza massima:

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

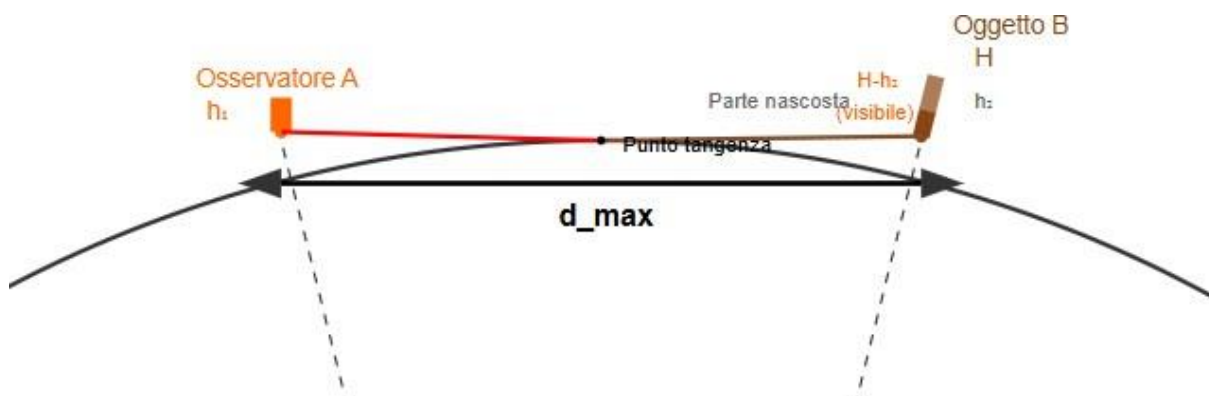
dove:

R = raggio terrestre (≈ 6.371 km)

Principio geometrico:

- La linea di vista è tangente alla Terra
- Ogni osservatore vede fino al suo orizzonte
- La distanza totale è la somma delle distanze ai rispettivi orizzonti
- Formula derivata dal teorema di Pitagora

Se ora supponiamo che l'oggetto B sia più alto $H > h_2$ esso sarà visibile dall'osservatore A solo per la parte eccedente, ossia per $(H - h_2)$



Esempi

(Valore medio del raggio terrestre: $R = 6371$ km)

1. Una persona in riva al mare:

Immaginiamo una persona alta:

- 1,10 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.00 m dal suolo (0,0010 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.001} = 3.56 \text{ km}$$

- 1,80 metri, quindi avente gli occhi a circa 1.70 m dal suolo (0,0017 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65 \text{ km}$$

- 2.10 metri, quindi avente gli occhi a circa 2.00 m dal suolo (0,0020 km), in piedi sulla spiaggia. La distanza del suo orizzonte sarà

$$d = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.0020} = 5.01 \text{ km}$$

2. Se si sale su una casa alta 10 o 100 m oppure su una collina alta 1000 m, la distanza dell'orizzonte vale rispettivamente 11, 35 e 110 km.

3. Un aereo di linea vola a una quota di crociera di circa 10.000 metri (10 km). A questa altitudine, la visuale è ancora più ampia:

$$d \approx [(2 \cdot 6371 \cdot 10)]^{1/2} \approx \sqrt{127420} \text{ km} \approx 357 \text{ km}$$

4. Due persone alte 1.80 m (occhi a 1.70 dal suolo) sono in piedi uno di fronte all'altra su una superficie piatta, a quale distanza massima riescono appena a vedersi?

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2} = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} + \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0.00170} = 4.65 + 4.65 = 9.3 \text{ km}$$

Ciò significa che se la seconda persona fosse alta 2.30 m posta a 9.3 km dalla prima, sarebbe visibile solo la sua parte superiore per 0.5 m.

5. Una persona in riva al mare sta guardando una barca a 10 km di distanza, chiediamoci ora quale sia l'abbassamento della visuale della barca.

Occorre calcolare h_2 dalla formula $d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$ (essendo: $d_{\max} = 10$ km, $h_1 = 1.70$ m)

$$d_{\max} = \sqrt{2Rh_1} + \sqrt{2Rh_2}$$

$$h_2 = \frac{(d_{\max} - \sqrt{2Rh_1})^2}{2R} = \frac{(10 - 4.65)^2}{12742} = 2.2 \text{ m}$$

Quindi i primi 2.2 m della barca non saranno visibili a causa della curvatura terrestre (ovviamente neanche usando un binocolo!).

6. Se osserviamo un punto a 20 km di distanza, l'abbassamento sarà:

Usando la relazione precedente e facendo i calcoli si ha: $h_2 = 18.2$ m.

Se ci si sdraia a terra nel limite matematico di $h = 0$ si ha $d = 0$. Questo significa che teoricamente, se gli occhi fossero esattamente a livello della superficie terrestre ($h = 0$), non si potrebbe vedere alcun orizzonte, infatti la linea di tangenza in questo caso incontra la superficie esattamente nel punto in cui è l'osservatore, cioè la distanza fra l'osservatore e l'orizzonte è zero.

Possiamo ora chiederci: uno spostamento angolare di un grado di latitudine a quale lunghezza di arco terrestre corrisponda. Basta considerare che sussiste la seguente relazione

$$\alpha^\circ : 360^\circ = d : 2\pi R \quad \text{cioè} \quad \alpha^\circ = 57.3^\circ d/R$$

Se α vale 1° allora $d = R/57,3^\circ$ ossia $6371/57.4 =$ circa 110 km,

cioè allo spostamento di ogni grado di latitudine corrisponde sulla circonferenza uno spostamento di circa 110 km., a tale distanza, come visto nell'esempio 2, corrisponde un abbassamento della visuale di circa 1 km.

Quindi ogni 110 km che si percorre sulla superficie terrestre "la visuale" si abbassa di circa 1 km

N.B. È importante notare che questi calcoli si basano su un modello idealizzato della Terra come una sfera perfetta e non tengono conto di alcuni fattori:

la forma non perfettamente sferica della Terra: il nostro pianeta è in realtà un ellissoide di rotazione, leggermente schiacciato ai poli. Il raggio equatoriale è di circa 6.378 km e quello polare di circa 6.357 km. Questa differenza, sebbene minima, può influenzare calcoli di precisione.

la rifrazione atmosferica: la luce non viaggia in linea retta attraverso l'atmosfera, ma viene leggermente curvata. Questo fenomeno, chiamato rifrazione atmosferica, tende a "sollevare" gli oggetti all'orizzonte, facendoli apparire più alti di quanto non siano in realtà. Di conseguenza, l'orizzonte visibile è leggermente più lontano di quello geometrico.

Le maree

a cura di Giancarlo Buccella

Premessa

Le maree sono uno dei fenomeni più affascinanti del nostro pianeta e rappresentano un perfetto esempio di come forze gravitazionali distanti possano influenzare direttamente la nostra vita quotidiana. L'effetto mareale è quel fenomeno per cui un corpo celeste, come la Terra, viene "deformato" dall'attrazione gravitazionale di un altro corpo, come la Luna o il Sole. Questo non significa che il pianeta si pieghi visibilmente, ma che la sua massa, in particolare quella fluida come gli oceani, tende a "stirarsi" lungo la direzione del corpo che la attrae ed in versi opposti. Mentre la Terra ruota sul proprio asse, ogni punto della sua superficie passa attraverso questi due rigonfiamenti ogni 24 ore circa, spiegando perché si verificano due alte e due basse maree al giorno.

La causa principale: l'attrazione gravitazionale

Il fenomeno delle maree è causato principalmente dall'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra. Secondo la legge di gravitazione universale di Newton, ogni corpo celeste attrae ogni altro corpo con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa.

La Terra non è un corpo rigido: gli oceani, essendo fluidi, possono deformarsi sotto l'azione di forze esterne. Quando la Luna si trova sopra un oceano, l'acqua viene letteralmente "tirata" verso l'alto, creando un rigonfiamento. Questo genera l'alta marea.

Il meccanismo delle due maree giornaliere

Potreste chiedervi perché abbiamo due alte maree al giorno invece di una sola. La spiegazione è più sottile di quanto sembri. Mentre il lato della Terra rivolto verso la Luna subisce un'attrazione gravitazionale più forte (essendo più vicino), il lato opposto ne subisce una più debole. Questo crea una differenza di forze che causa un secondo rigonfiamento sul lato opposto della Terra.

Inoltre, dobbiamo considerare che il sistema Terra-Luna ruota attorno al loro centro di massa comune (baricentro), che si trova all'interno della Terra ma non al suo centro. Questo movimento rotazionale genera una forza centrifuga che contribuisce al rigonfiamento oceanico sul lato opposto alla Luna.

Il contributo del Sole

Anche il Sole influenza le maree, nonostante sia molto più lontano della Luna. Quando Sole e Luna sono allineati (durante la luna nuova o piena), i loro effetti si sommano creando le "maree sigiziali" - particolarmente intense. Quando invece formano un angolo retto rispetto alla Terra (durante i quarti di luna), i loro effetti si sottraggono parzialmente, generando le "maree di quadratura" - meno pronunciate.

La forza di marea generata dal Sole è pari a circa il 46% della forza di marea generata dalla Luna. In altre parole, l'influenza della Luna è circa 2,2 volte maggiore di quella del Sole

Variazioni locali

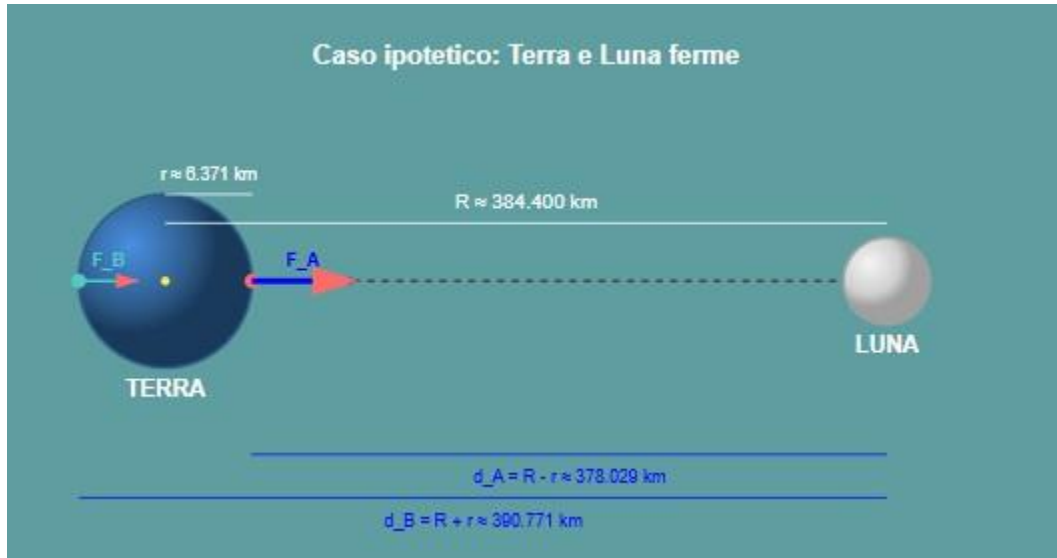
L'intensità delle maree varia enormemente da luogo a luogo. In mari chiusi come il Mediterraneo, le maree sono appena percettibili (pochi centimetri), mentre in alcune baie come quella di Fundy in Canada possono superare i 15 metri di escursione. Questo dipende dalla forma delle coste, dalla profondità dei fondali e dalla risonanza dei bacini oceanici.

Conseguenze ed applicazioni

Le maree hanno profonde implicazioni biologiche ed economiche. Molti ecosistemi costieri si sono evoluti in sincronia con i cicli mareali, e oggi sfruttiamo questo fenomeno per produrre energia pulita attraverso le centrali mareomotrici.

Il fenomeno delle maree rappresenta quindi un esempio straordinario di come la meccanica celeste si manifesti concretamente sulla Terra, dimostrando l'interconnessione tra i diversi corpi del sistema solare e la capacità della fisica di spiegare fenomeni apparentemente complessi attraverso principi fondamentali eleganti.

Partiamo con illustrare il caso ipotetico in cui Terra e Luna siano fermi nelle loro posizioni, in un SR inerziale. Nel seguente disegno viene schematizzata la situazione, non è stata disegnata la forza di gravità dovuta alla Terra per maggiore chiarezza.



$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M_L = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$r = 384,000 \text{ km} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

$$R = 6,378 \text{ km} = 6.378 \times 10^6 \text{ m}$$

$$a_{A-Luna} = G \frac{M_L}{(r-R)^2} = 3.43 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{B-Luna} = G \frac{M_L}{(r+R)^2} = 3.21 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

$$a_{Terra} = G \frac{M_T}{R^2} = 9.82026 \text{ m/s}^2$$

$$a_{A,tot} = a_{A-Luna} - a_{Terra} = -9.82023 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B,tot} = a_{B-Luna} + a_{Terra} = 9.82029 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta a = 6.0 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Punto A (lato più vicino alla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- La gravità lunare “tira” la superficie in direzione opposta.
- La forza netta ha un valore leggermente inferiore al valore dato dalla presenza sola Terra, la superficie (se deformabile, come l'acqua) può "dilatarsi" formando l'alta marea. Si ha quindi un lieve rigonfiamento della superficie.

Punto B (lato più lontano dalla Luna):

- La gravità terrestre “tira” la superficie verso il centro della Terra.
- Anche la gravità lunare, in questa posizione, agisce nella stessa direzione, sebbene con una intensità minore rispetto al caso precedente poiché il punto B è più lontano dalla Luna rispetto al punto A.
- La forza netta ha ora un valore leggermente superiore al valore dato dalla presenza della sola Terra, il risultato è che la superficie liquida della terra essendo deformabile subirebbe un abbassamento formando la bassa marea. Si ha quindi un lieve abbassamento della superficie.

La seguente figura mostra in modo esagerato il rigonfiamento a destra e l'infossamento a sinistra: alta marea a destra e bassa marea a sinistra.



Abbiamo quindi appurato che se la Terra e Luna li considerassimo immobili nello spazio (fissi e non in orbita):

non esisterebbe un'accelerazione comune del sistema verso la Luna (non c'è caduta libera).

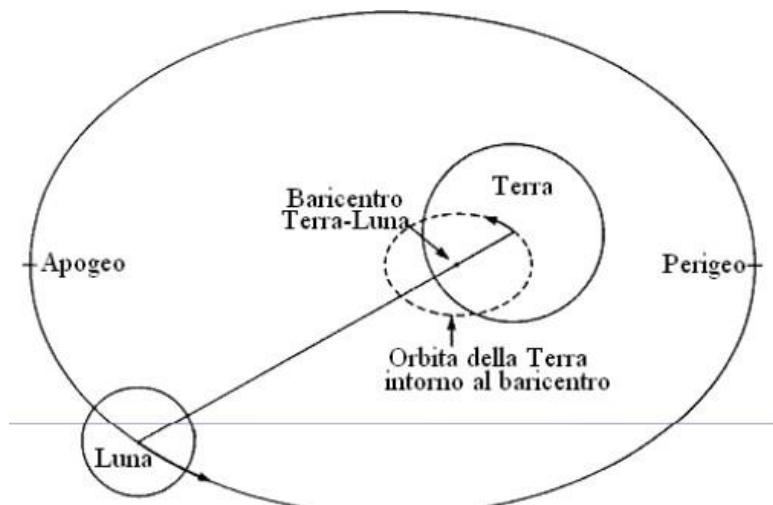
la deformazione sarebbe data solo data dalla somma statica delle forze gravitazionali.

Non si creerebbe il rigonfiamento nel lato della Terra opposto alla Luna, cioè la doppia gobba tipica delle maree, in quanto mancherebbe l'effetto dinamico dovuto alla rotazione del sistema.

Effetto mareale

L'effetto mareale vero e proprio è legato a come la Terra e la Luna si muovono insieme attorno al loro baricentro comune. In pratica:

- Il sistema Terra-Luna è in caduta libera attorno al baricentro.
- Tutto il pianeta subisce un'accelerazione comune verso la Luna.
- Quello che conta per le maree è la differenza fra l'accelerazione locale della Luna su un punto e l'accelerazione del centro della Terra, cioè l'accelerazione relativa.



Contrariamente all'intuizione comune, la Luna non orbita semplicemente attorno al centro della Terra. In realtà, entrambi i corpi celesti orbitano attorno a un punto comune chiamato baricentro, che è il centro di massa del sistema Terra-Luna. Poiché la Terra è molto più massiccia della Luna, questo baricentro si trova all'interno della Terra stessa. Il periodo di questo moto orbitale è ovviamente il mese siderale.

Di conseguenza, anche la Terra compie una piccola orbita mensile attorno a questo punto. Il moto che ne risulta genera un'accelerazione centripeta, che andiamo ora ad analizzare e calcolare.

Descrizione Analitica

L'accelerazione centripeta, a_c , è l'accelerazione che un corpo subisce quando si muove lungo una traiettoria curva, ed è sempre diretta verso il centro di curvatura dell'orbita. La sua formula è:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Dove:

- v è la velocità orbitale del corpo (in questo caso, della Terra attorno al baricentro).
- r è il raggio dell'orbita (la distanza del centro della Terra dal baricentro).
- ω è la velocità angolare, data da $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo orbitale.

Per calcolare l'accelerazione centripeta della Terra, dobbiamo prima determinare la posizione del baricentro e, di conseguenza, il raggio della piccola orbita terrestre.

Calcolo della posizione del baricentro (r_{Terra})

La posizione del baricentro si calcola con la formula del centro di massa per un sistema a due corpi:

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot r_{\text{Luna}}$$

Dove r_{Terra} e r_{Luna} sono le distanze dei centri di Terra e Luna dal baricentro, e M sono le rispettive masse.

Sapendo che la distanza totale tra i centri dei due corpi, d , è $d = r_{\text{Terra}} + r_{\text{Luna}}$, possiamo esprimere r_{Luna} come $d - r_{\text{Terra}}$ e risolvere per r_{Terra} :

$$M_{\text{Terra}} \cdot r_{\text{Terra}} = M_{\text{Luna}} \cdot (d - r_{\text{Terra}}) \quad r_{\text{Terra}} \cdot (M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}) = M_{\text{Luna}} \cdot d$$
$$r_{\text{Terra}} = \frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}$$

Questa formula ci fornisce il raggio dell'orbita della Terra attorno al baricentro.

La velocità angolare è determinata dal periodo di rivoluzione del sistema, che è il mese siderale, T .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sostituendo le espressioni di r_{Terra} e ω nella formula dell'accelerazione centripeta, otteniamo l'espressione analitica completa:

$$a_{c,\text{Terra}} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{M_{\text{Luna}} \cdot d}{M_{\text{Terra}} + M_{\text{Luna}}}\right)$$

Utilizziamo ora i valori standard per le costanti fisiche:

Massa della Terra (M_{Terra}): 5.9722×10^{24} kg

Massa della Luna (M_{Luna}): 7.342×10^{22} kg

Distanza media Terra-Luna (d): 384,400 km = 3.844×10^8 m

Periodo orbitale (mese siderale, T): 27.32 giorni $\approx 2.36 \times 10^6$ s

$$r_{\text{Terra}} = \frac{(7.342 \times 10^{22} \text{ kg}) \cdot (3.844 \times 10^8 \text{ m})}{(5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}) + (7.342 \times 10^{22} \text{ kg})} \approx 4.67 \times 10^6 \text{ m}$$

Questo risultato, 4670 km, conferma che il baricentro si trova ben all'interno del raggio terrestre (che è di circa 6371 km).

$$\omega = \frac{2\pi}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} \approx 2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$a_{c,\text{Terra}} = \omega^2 \cdot r_{\text{Terra}} \quad a_{c,\text{Terra}} = (2.662 \times 10^{-6} \text{ rad/s})^2 \cdot (4.67 \times 10^6 \text{ m})$$

$$a_{c,\text{Terra}} \approx 3.31 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

In senso generale questo valore, sebbene piccolo, è fondamentale. È questa accelerazione che, insieme all'attrazione gravitazionale del Sole, determina la complessa traiettoria della Terra nello spazio, che non è una semplice ellisse ma un'ellisse con una piccola "oscillazione" mensile.

Tornando al nostro caso, l'aspetto fondamentale da comprendere è che noi, trovandoci sulla Terra, sperimentiamo accelerazioni *relative* al centro della Terra, che è a sua volta un sistema di riferimento non inerziale (perché accelera). La "marea" non è data dalla gravità lunare in sé, ma dalla *differenza* tra l'attrazione lunare su di noi e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analisi delle accelerazioni

Consideriamo una massa di prova m sulla superficie terrestre. In un sistema di riferimento inerziale (ad esempio, fisso rispetto al Sole), le accelerazioni agenti sulla massa m sono:

1. Accelerazione gravitazionale terrestre ($a_{g,T}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Terra.
2. Accelerazione gravitazionale lunare ($a_{g,L}$): L'attrazione esercitata dalla massa della Luna.

Tuttavia, il centro della Terra stesso è accelerato dalla gravità lunare. Questa è esattamente l'accelerazione centripeta a_c che abbiamo calcolato prima, la quale mantiene la Terra nella sua orbita attorno al baricentro.

$$a_c = \frac{GM_{\text{Luna}}}{d^2}$$

L'accelerazione netta che una massa m sperimenta *rispetto al centro della Terra* (e che quindi causa la deformazione del pianeta) è la somma vettoriale di tutte le accelerazioni agenti su m meno l'accelerazione del sistema di riferimento stesso (il centro della Terra).

$$a_{\text{netta},m} = (a_{g,T} + a_{g,L}) - a_c \quad (*)$$

Raggruppando i termini, otteniamo:

$$a_{\text{netta},m} = a_{g,T} + (a_{g,L} - a_c)$$

Il termine $a_{g,T}$ è semplicemente l'accelerazione di gravità standard che ci tiene ancorati al suolo. Il termine interessante è $(a_{g,L} - a_c)$, che rappresenta l'accelerazione di marea (a_{marea}). È la differenza tra l'attrazione lunare nel punto in cui si trova la massa m e l'attrazione lunare sul centro della Terra.

Analizziamo ora i due casi specifici lungo la congiungente Terra-Luna.

Caso 1: Punto Sublunare (P_{sub})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più vicino alla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d - R_{Terra}$

Direzione: Assumiamo un asse che va dalla Terra alla Luna come positivo.

– Accelerazione gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$$a_{g,T} = -\frac{GM_{Terra}}{R_{Terra}^2} \quad \text{diretta verso il centro della Terra (direzione negativa).}$$

– Accelerazione gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$$a_{g,L}(P_{sub}) = +\frac{GM_{Luna}}{(d-R_{Terra})^2} \quad \text{diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

– Accelerazione del centro della Terra (a_c):

$$a_c = +\frac{GM_{Luna}}{d^2} \quad \text{anch'essa è diretta verso la Luna (direzione positiva).}$$

Calcolo dell'accelerazione di marea a P_{sub} : l'accelerazione di marea è la differenza tra l'attrazione lunare su m e quella sul centro della Terra.

$$a_{marea}(P_{sub}) = a_{g,L}(P_{sub}) - a_c = \frac{GM_{Luna}}{(d - R_{Terra})^2} - \frac{GM_{Luna}}{d^2}$$

Poiché $(d - R_{Terra}) < d$, il primo termine è più grande del secondo. Il risultato è positivo. Questo significa che nel punto sublunare, la massa m (e l'acqua dell'oceano) è tirata verso la Luna *più fortemente* del centro della Terra. Relativamente alla Terra, questo si manifesta come un'accelerazione verso l'esterno, che solleva l'acqua e crea l'alta marea.

Il valore numerico di tale accelerazione è $a_{marea}(P_{sub}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$

Caso 2: Punto Antipodale (P_{ant})

La massa m si trova nel punto della superficie terrestre più lontano dalla Luna.

Distanza di m dalla Luna: $d + R_{Terra}$

Direzione: Usiamo lo stesso asse di prima.

– Accelerazione Gravitazionale Terrestre ($a_{g,T}$):

$a_{g,T} = + \frac{GM_{Terra}}{R_{Terra}^2}$ diretta verso il centro della Terra (in questo caso, lungo la direzione positiva dell'asse se l'origine è in P_{ant}). Per coerenza, diciamo che è sempre $-g$ se misurata radialmente verso l'esterno.

– Accelerazione Gravitazionale Lunare su m ($a_{g,L}$):

$a_{g,L}(P_{ant}) = + \frac{GM_{Luna}}{(d+R_{Terra})^2}$ diretta verso la Luna (direzione positiva).

– Accelerazione del Centro della Terra (a_c):

$a_c = + \frac{GM_{Luna}}{d^2}$ sempre diretta verso la Luna (direzione positiva).

Calcolo dell'Accelerazione di Marea a P_{ant} :

$$a_{marea}(P_{ant}) = a_{g,L}(P_{ant}) - a_c = \frac{GM_{Luna}}{(d + R_{Terra})^2} - \frac{GM_{Luna}}{d^2}$$

Ora, poiché $(d + R_{Terra}) > d$, il primo termine è più piccolo del secondo. Il risultato è negativo. Questo significa che l'accelerazione di marea è diretta in verso opposto alla Luna.

Il valore numerico di tale accelerazioni è

$$a_{marea}(P_{sub}) = a_{marea}(P_{ant}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

Essendo g circa 10 m/s^2 tali accelerazioni sono circa un decimilionesimo di g .

L'interpretazione fisica è che il centro della Terra è attratto verso la Luna *più fortemente* della massa m al punto antipodale. È come se la Terra venisse "tirata via da sotto" la massa m , lasciandola indietro. Relativamente alla Terra, questo si manifesta di nuovo come un'accelerazione verso l'esterno, creando la seconda alta marea.

Conclusione

L'accelerazione totale a cui è soggetta la massa m sulla superficie terrestre, e che ne determina il "peso" effettivo, è la somma della gravità terrestre e dell'accelerazione di marea:

$$a_{\text{totale},m} = a_{g,T} + a_{\text{marea}}$$

Al punto sublunare, l'accelerazione di marea è diretta verso l'esterno, opponendosi leggermente alla gravità terrestre e causando un rigonfiamento.

Al punto antipodale, l'accelerazione di marea è anch'essa diretta verso l'esterno, opponendosi ugualmente alla gravità e causando il secondo rigonfiamento.

(*) Questa espressione viene dal considerare che in un SR non inerziale vale la seguente relazione

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}$$

Accelerazione assoluta ($\mathbf{a}_{\text{assoluta}}$): È l'accelerazione di un punto (la nostra massa m) misurata in un sistema di riferimento fisso o inerziale (S). Nel nostro caso, è la somma di tutte le forze gravitazionali "vere" che agiscono su m , divisa per m . $\mathbf{a}_{\text{assoluta}} = \mathbf{a}_{g,T} + \mathbf{a}_{g,L}$

Accelerazione relativa ($\mathbf{a}_{\text{relativa}}$): è l'accelerazione dello stesso punto misurata in un sistema di riferimento mobile o non inerziale (S'). Nel nostro caso, il sistema di riferimento è solidale con il centro della Terra. Questa è l'accelerazione che un osservatore sulla Terra "vede" o "sente". È esattamente l'accelerazione netta che stavamo cercando, quella che causa la deformazione mareale.

Accelerazione di trascinamento ($\mathbf{a}_{\text{trascinamento}}$): È l'accelerazione che avrebbe un punto fisso nel sistema mobile S' , vista dal sistema fisso S . In parole povere, è l'accelerazione del sistema di riferimento mobile stesso. Nel nostro caso, è l'accelerazione del centro della Terra (a_c) dovuta alla sua orbita attorno al baricentro Terra-Luna. $\mathbf{a}_{\text{trascinamento}} = \mathbf{a}_c$

Accelerazione di Coriolis ($\mathbf{a}_{\text{Coriolis}}$): Questo è un termine aggiuntivo che compare solo se il sistema di riferimento mobile sta ruotando. Poiché la Terra ruota sul proprio asse, questo termine esiste ed è fondamentale per spiegare la rotazione dei cicloni e le correnti oceaniche. La sua formula è $\mathbf{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{relativa}})$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del sistema mobile (la rotazione terrestre) e $\vec{v}_{\text{relativa}}$ è la velocità della massa m rispetto alla Terra. Per l'analisi statica dei rigonfiamenti mareali, questo termine può essere inizialmente trascurato per semplicità, come qui è stato fatto, ma è essenziale in una trattazione dinamica completa delle maree.

Collegamento con la spiegazione precedente.

Ora riorganizziamo la formula per trovare ciò che ci interessa, ovvero l'accelerazione relativa (l'effetto che sentiamo sulla Terra):

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = \vec{a}_{\text{assoluta}} - \vec{a}_{\text{trascinamento}} - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Sostituendo i termini che abbiamo identificato per il problema delle maree si ha

$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c - \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Se trascuriamo l'effetto di Coriolis, come è lecito fare in una trattazione non avanzata, otteniamo:

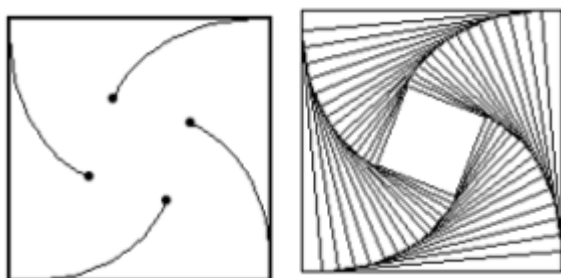
$$\vec{a}_{\text{relativa}} = (\vec{a}_{g,T} + \vec{a}_{g,L}) - \vec{a}_c$$

Problema delle formiche che si inseguono

a cura di Giancarlo Buccella

Quattro operose formiche partono dai quattro angoli di un quadrato di 6 metri di lato. Ogni formica si dirige verso quella alla sua destra muovendosi verso il centro a velocità costante di $v = 1 \text{ cm/s}$.

Quanti minuti impiegheranno le formiche per incontrarsi al centro?



Proviamo a risolvere il problema in modo intuitivo ed elementare.

- Forma: **quadrato** $\Rightarrow N = 4$
- Lunghezza del lato: $L = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$
- Velocità: $v = 1 \text{ cm/s}$

Simmetria del problema: Il problema ha una simmetria rotazionale di 90 gradi. Le condizioni iniziali e le regole di movimento sono identiche per ogni formica rispetto alla sua "preda".

Punto di convergenza: A causa di questa simmetria, le formiche si muoveranno in modo tale da mantenere sempre la configurazione di un quadrato (che si rimpicciolisce e ruota). Alla fine, si incontreranno tutte contemporaneamente in un unico punto.

Il centro è il punto di incontro: L'unico punto che preserva la simmetria durante tutto il movimento e dove possono incontrarsi simultaneamente è il centro geometrico del quadrato iniziale.

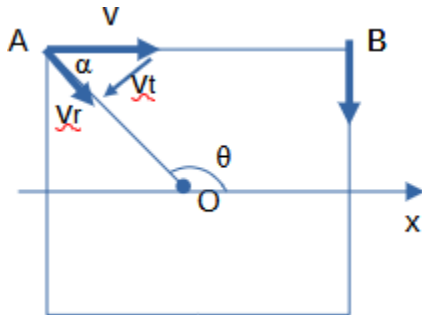
Polo della spirale: La traiettoria di ogni formica è una spirale logaritmica. Una spirale logaritmica $r = a e^{k\theta}$ si avvolge (o si svolge) attorno a un punto fisso chiamato polo, che corrisponde a $r = 0$. Nel caso delle formiche, il punto verso cui spiraleggiano e dove alla fine si incontrano è proprio questo polo.

Soluzione semplice

In ogni istante le quattro formiche stanno sui vertici di un quadrato che si rimpicciolisce e ruota man mano che le formiche si avvicinano fra di loro. Il percorso di ogni inseguitrice A è sempre perpendicolare al percorso dell'inseguita B. Questo significa che nel vettore moto di B non vi è alcuna componente che la fa avvicinare o allontanare da A. Di conseguenza A cattura B nello stesso tempo in cui l'avrebbe catturata se B fosse stata ferma. Perciò A percorre una distanza uguale al lato del quadrato per raggiungere B. Il tempo impiegato è:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{600 \text{ cm}}{1 \text{ cm/s}} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$$

Oppure



La distanza iniziale da coprire affinché la formica in A raggiunga il centro è $r_0 = AO$ che è la metà della diagonale del quadrato che come noto vale $d = \sqrt{2} L$, quindi

$$r_0 = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}L}{2}$$

La componente radiale della velocità è

$$v_r = v \cos \alpha = 1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm/s}$$

Il tempo occorrente per arrivare al centro lo ricaviamo direttamente dalla $s = vt$ (moto rettilineo uniforme):

$$t = \frac{r_0}{v_r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} L}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2/2} \text{ (cm/s)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} 600 \text{ (cm)} = 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$$

Vediamo che tipo di curva seguono le formiche. A tal uopo conviene usare le coordinate polari (r, θ) , dove:

$r(t)$ distanza dal centro al tempo t , (rispetto ad un punto fisso detto polo)

$\theta(t)$ angolo formato da $r(t)$ rispetto ad un asse fisso, ad esempio l'asse x (orizzontale) al tempo t

Scomponiamo il vettore velocità, in coordinate polari, nelle due componenti tangenziale e radiale (vedi figura):

$$\text{componente radiale } v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha$$

$$\text{componente tangenziale } v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \alpha$$

dove il segno meno considera il moto verso il centro (r diminuisce quando t aumenta), ed α è l'angolo costante tra la direzione del moto e la direzione radiale (verso il centro). Nel seguente disegno si capisce la differenza fra i due angoli α e θ .

Data la simmetria del quadrato la direzione del moto (ossia della velocità) di A forma sempre un angolo costante perché il bersaglio (la formica inseguita) si muove in modo simmetrico. Quindi $\alpha = \text{cost.}$ Questa condizione rimane vera anche se si considera un generico poligono di N lati.

$$\frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \alpha$$

L'equazione della curva è data dalla relazione di dipendenza di r con θ , ossia $r(\theta)$, quindi calcoliamo la derivata di $dr/d\theta$, usando la regola della "catena di derivazione"

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{-v \cos \alpha}{v \sin \alpha / r} = - \frac{r}{\tan \alpha}$$

Integrando

$$\int \frac{dr}{r} = - \int \frac{d\theta}{\tan \alpha}$$

$$\log r = - \frac{1}{\tan \alpha} \theta + c$$

$$r(\theta) = e^{-(\theta / \tan \alpha) + c} = e^c e^{-\theta / \tan \alpha}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

Quindi l'equazione di spirale logaritmica è (ponendo $a = e^c$ e $b = 1/\tan \alpha$):

$$r(\theta) = a e^{-b\theta}$$

Per $\theta = 0$ si calcola e^c

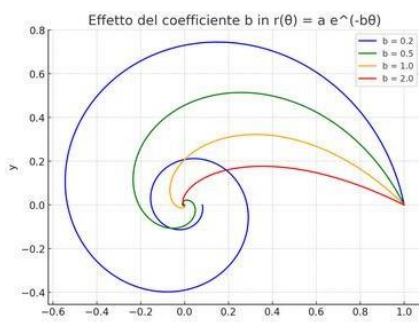
$$r(0) \equiv r_0 = e^c e^{-0} = e^c$$

E d'altronde nel nostro caso $\alpha = 45^\circ$ quindi $\tan \alpha = 1$, quindi

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta}$$

Questa è l'equazione della spirale logaritmica seguita dalle quattro formiche.

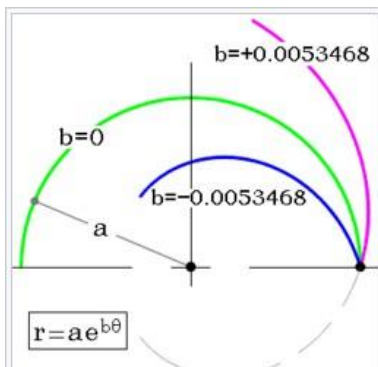
Significato del coefficiente b .



Più grande è b , più rapidamente la spirale si avvolge verso l'origine.

Più piccolo è b , più la spirale è "lenta" e si estende più a lungo prima di stringersi.

In sintesi, b controlla la velocità di decadimento radiale: un valore alto fa restringere la curva più in fretta.



Confronto di tre tratti di spirali logaritmiche che si sviluppano partendo dallo stesso punto di distanza (a) dall'origine. Valore di $b=0$ per quello di colore verde, gli altri due hanno lo stesso valore assoluto di (b) con la differenza che per quello magenta è positivo (la curva si allontana indefinitamente) mentre per quello blu è negativo (la curva si avvolge verso il polo).

Con il ridursi del valore del raggio vettore l'angolo percorso aumenta vieppiù, ed alla fine ponendo $r = 0$, ossia quando la formica raggiunge il centro, vediamo dalla formula $r = r_0 e^{-\theta}$ che si avrebbe $0 = r_0 e^{-\theta}$ e questo implicherebbe $\theta = \text{infinito}$! Quindi dal punto di vista matematico la formica arriva al centro in 10 minuti compiendo infiniti giri intorno al centro del quadrato.

Considerazioni sul significato "infiniti" giri.

Innanzitutto notiamo che mentre la velocità con cui la formica si avvicina al centro (dr/dt) è costante: $dr/dt = -v/\sqrt{2}$, /questo è il motivo per cui impiega un tempo finito per coprire la distanza radiale iniziale fino a zero), la velocità angolare aumenta in modo esponenziale, la velocità angolare $d\theta/dt$ infatti è inversamente proporzionale a r . Man mano che r (la distanza dal centro) si avvicina a zero, $1/r$ tende a infinito. Di conseguenza, $d\theta/dt$ tende a infinito.

Man mano che una formica si avvicina al centro:

I "giri" che compie diventano sempre più piccoli (la circonferenza di ogni giro tende a zero).

Il tempo impiegato per completare ciascuno di questi giri sempre più piccoli diventa anch'esso sempre più breve, tendendo a zero.

La velocità angolare (quanti gradi o radianti copre al secondo) diventa enormemente alta.

[Immagina una moneta che rotola in un imbuto a spirale di quelli che si trovano a volte per raccogliere fondi. La moneta raggiunge il buco centrale in un tempo finito. Ma, poco prima di cadere nel buco, la moneta compie moltissimi giri, sempre più velocemente, attorno al centro. Se l'imbuto fosse "perfetto" e seguisse una spirale logaritmica, il numero di giri sarebbe teoricamente infinito.]

Quando diciamo che la formica compie "infiniti giri", ci stiamo riferendo a ciò che il modello matematico idealizzato prevede.

Ecco come interpretare questa comparsa di questo infinito. In fisica non esistono infiniti.

Il Modello Matematico è un'astrazione:

L'equazione $r(\theta) = a e^{(-\theta)}$ descrive una curva perfetta. In questa astrazione matematica, r diventa esattamente zero solo quando θ diventa esattamente infinito.

Nel modello, trattiamo le formiche come punti adimensionali che possono avvicinarsi indefinitamente.

La Realtà Fisica ha dei Limiti:

Dimensioni Finite: Le formiche non sono punti. Hanno una dimensione fisica. Si incontreranno (o, più realisticamente, si scontreranno o si fermeranno l'una sull'altra) quando la distanza r tra loro e il centro diventa comparabile con la loro stessa dimensione. A quel punto, il concetto di "inseguire un punto" cessa di avere senso nel modo idealizzato.

Natura discreta della materia: a scale estremamente piccole, la natura continua dello spazio e del moto descritta dalla meccanica classica potrebbe non essere più un'approssimazione valida (anche se questo è ben oltre la scala del problema delle formiche).

Cosa Significa l'"Infinito" del Modello per la Fisica del Problema:

Tendenza al Limite: Il modello ci dice che, se le formiche fossero punti ideali e potessero continuare il loro moto indefinitamente secondo le regole date, allora compierebbero un numero illimitato di giri.

Comportamento Qualitativo: L'aspetto "infiniti giri" del modello matematico si traduce, nel mondo fisico, in un numero molto grande e rapidamente crescente di giri man mano che si avvicinano al punto d'incontro. L'ultima frazione di millimetro prima dell'incontro vedrebbe un numero enorme di rapidissime "micro-rotazioni".

Convergenza rapida: significa che la velocità angolare $d\theta/dt$ diventa estremamente alta vicino al centro. La formica gira "follemente" su sé stessa negli istanti finali prima dell'incontro.

Quando il Modello cessa di essere una buona descrizione: Il modello matematico della spirale logaritmica è un'eccellente descrizione del moto delle formiche fino a quando le loro dimensioni fisiche non diventano significative rispetto alle distanze in gioco. Quando sono a pochi millimetri (o meno) dal centro e l'una dall'altra, la premessa che "la formica A insegue il punto matematico della formica B" inizia a vacillare. La formica A inizierà a interagire con il corpo fisico della formica B.

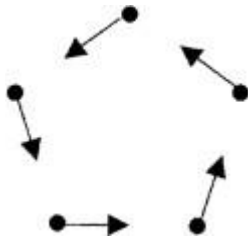
In sintesi:

Il modello matematico usa il concetto di infinito per descrivere il comportamento limite di un sistema idealizzato. Nel mondo fisico, questo "infinito" si traduce in un comportamento estremo (un numero molto elevato di giri, una velocità angolare molto elevata) che avviene in un intervallo di tempo e spazio estremamente piccolo, poco prima che le limitazioni fisiche (come la dimensione delle formiche) prendano il sopravvento e portino all'effettivo incontro "finito".

È un classico esempio di come un modello matematico possa fornire intuizioni profonde sul comportamento di un sistema, anche se le sue previsioni più estreme (come l'infinito) non sono presenti nella realtà fisica, esse indicano solo una tendenza.

Ora estendiamo il problema al caso generale di un poligono di N lati.

Consideriamo N formiche inizialmente poste ai vertici di un poligono regolare avente N lati di lunghezza L. Ad un certo istante esse iniziano a muoversi tutte insieme con velocità di modulo v e puntano istante per istante verso la formica più vicina, in questo modo esse si avvicineranno costantemente rimpicciolendo sempre più il poligono fino a che esso collassi nel suo centro. Calcolare il tempo occorrente affinché questo si verifichi e calcolare anche il numero di giri che ogni formica compie prima di arrivare al centro.



La velocità delle formiche può essere separata in una componente tangenziale, v_t e una radiale, v_r .

Il problema conserva una simmetria rotazionale di $2\pi/N$ radianti, questo è l'angolo sotteso dai due raggi consecutivi, in quanto l'angolo al centro viene diviso in N parti. Il triangolo AOB (supponiamo A e B due vertici consecutivi ed O centro del poligono) è isoscele con angoli alla base uguali indicati con α , mentre l'angolo al vertice è come già detto, $2\pi/N$, dovendo essere la loro somma pari a 180° , si ha:

$$\pi = 2\alpha + \frac{\pi}{N}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}$$

La velocità radiale, proiezione del vettore v sul raggio, che sarà negativa perché punta verso il centro,

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha = -v \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} \right)$$

Usando l'identità $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v \cos \alpha = -v \sin(\pi / N)$$

La componente tangenziale è

$$v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N} \right)$$

Usando l'identità $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ si ha

$$v_t = r \frac{d\theta}{dt} = v \cos(\pi / N)$$

Troviamo l'equazione della curva.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{-v \sin(\pi / N)}{v \cos(\pi / N) / r} = -r \tan(\pi / N)$$

$$\int \frac{dr}{r} = -\tan(\pi / N) \int d\theta$$

$$\log r = -\tan(\pi / N) \theta + c$$

$$r(\theta) = e^{-(\theta \tan(\pi / N) + c)} = e^c e^{-\theta \tan(\pi / N)}$$

Con la posizione dell'istante iniziale $r = r_0$ per $\theta = 0$ si ha $r_0 = e^c$

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta \tan(\pi / N)}$$

Calcoliamo il tempo occorrente alla formica per raggiungere il centro.

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{r_0}{|-v \sin(\pi / N)|}$$

Se L è il lato iniziale del poligono regolare di N lati, la distanza r_0 dal centro a un vertice è $r_0 = L / (2 \sin(\pi/N))$.

Sostituendo:

$$t = \frac{r_0}{|v_r|} = \frac{L}{2v \sin(\pi / N)}$$

Si vede che ponendo $N = 4$ si riottiene la soluzione trovata per il quadrato $t = L/v$.

Vediamo infine la distanza totale percorsa: $d = v t$.

$$d = vt = v \frac{L}{2v \sin^2(\pi / N)} = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / N)}$$

Per un triangolo $N = 3$

$$d = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / 3)^2} = \frac{L}{2(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{3} L = 0.67L$$

Per un quadrato $N = 4$

$$d = \frac{L}{2 \sin^2(\pi / 4)^2} = \frac{L}{2(1/\sqrt{2})^2} = L$$

Per un pentagono $N = 5$

$$d = \frac{L}{2\sin^2(\pi/5)} = \frac{L}{2(1/\sqrt{5}-\sqrt{5}/8)^2} = \frac{L}{2 \cdot (0.587)^2} = 1.45L$$

Come si vede la distanza percorsa è in funzione del numero dei lati del poligono.

Rimane inalterato il ragionamento precedente circa il tempo occorrente per arrivare al centro.

Nota

La spirale logaritmica, definita dalla funzione $r = a e^{k\theta}$ con k che può essere sia positiva che negativa, è una curva che appare in diversi fenomeni fisici e naturali grazie alle sue proprietà uniche, come il fatto che **l'angolo tra la tangente e il raggio è costante**. Ecco alcuni esempi fisici in cui la traiettoria segue una spirale logaritmica:

1. Moto di un corpo sotto una forza centrale inversamente proporzionale al cubo della distanza

Descrizione: In meccanica classica, se un corpo si muove sotto l'influenza di una forza centrale che varia come $F \propto 1/r^3$, la traiettoria può essere una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Questo tipo di forza può emergere in alcuni sistemi teorici, come un corpo carico in un campo elettrico o magnetico con specifiche condizioni. Ad esempio, un elettrone che si muove in un campo magnetico non uniforme con perdite di energia potrebbe approssimare una spirale logaritmica mentre si avvicina o si allontana dal centro.

Dettaglio: La forza $F = -k/r^3$ porta a un'equazione differenziale il cui risultato, in coordinate polari, dà una traiettoria del tipo $r = a e^{k\theta}$, dove (k) dipende dai parametri della forza e dalle condizioni iniziali.

2. Crescita di strutture biologiche (es. conchiglie dei molluschi)

Descrizione: Molte conchiglie di molluschi, come quelle del nautilus, crescono seguendo una spirale logaritmica. Questo accade perché l'organismo aggiunge materiale in modo proporzionale alla sua crescita, mantenendo un angolo costante rispetto al raggio.

Esempio: La conchiglia del nautilus cresce in modo che ogni nuova camera sia più grande della precedente secondo un fattore costante, formando una spirale logaritmica. Questo garantisce stabilità strutturale e distribuzione ottimale del peso.

Dettaglio: La spirale logaritmica è ideale in natura perché permette una crescita uniforme senza cambiare forma, un fenomeno noto come autosimilarità.

3. Traiettorie di insetti attratti da una sorgente luminosa

Descrizione: Alcuni insetti, come le falene, seguono una spirale logaritmica quando si avvicinano a una luce. Questo accade perché l'insetto cerca di mantenere un angolo costante rispetto alla sorgente luminosa (un comportamento chiamato fototassi), ma la sua traiettoria si curva a causa del movimento.

Esempio: Una falena che vola verso una lampada, cercando di mantenere un angolo fisso con i raggi di luce, finisce per seguire una spirale logaritmica, avvicinandosi sempre di più alla fonte luminosa.

Dettaglio: Se l'insetto volasse in linea retta, non seguirebbe una spirale, ma il suo metodo di navigazione (mantenere un angolo costante con la luce) porta a questa traiettoria.

4. Dinamica dei bracci delle galassie a spirale

Descrizione: I bracci di alcune galassie a spirale, come la Via Lattea, approssimano una spirale logaritmica. Questo è dovuto alla dinamica gravitazionale e alla rotazione differenziale delle stelle e del gas nella galassia.

Esempio fisico: Nella Via Lattea, i bracci spirali seguono una forma approssimativamente logaritmica con un angolo di inclinazione (pitch angle) costante, che è una caratteristica della spirale logaritmica.

Dettaglio: La spirale logaritmica emerge perché le onde di densità nella galassia si propagano in modo che le stelle e il gas si organizzano in una struttura a spirale con un'espansione proporzionale all'angolo.

5. Movimento di particelle in un fluido con resistenza viscosa

Descrizione: Una particella che si muove in un fluido viscoso, soggetta a una forza centrale e a una resistenza proporzionale alla velocità, può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: Un vortice in un fluido, come un mulinello in acqua o aria, può trascinare una particella leggera (ad esempio una foglia) lungo una traiettoria a spirale logaritmica mentre la particella perde energia e si avvicina al centro del vortice.

Dettaglio: La resistenza viscosa causa una dissipazione di energia, e la combinazione di questa forza con una forza centrale (come la pressione del fluido) può portare a una traiettoria a spirale logaritmica.

6. Onde elettromagnetiche in mezzi particolari

Descrizione: In alcuni sistemi ottici o elettromagnetici, come le onde che si propagano in mezzi con proprietà specifiche (es. mezzi anisotropi o con gradiente di indice di rifrazione), il percorso delle onde può seguire una spirale logaritmica.

Esempio fisico: In un esperimento con un metamateriale progettato per curvare la luce in modo particolare, il percorso di un raggio può assumere la forma di una spirale logaritmica.

Dettaglio: Questo accade quando il mezzo induce un angolo di rifrazione che cambia in modo esponenziale con la posizione, portando a una traiettoria curva simile a una spirale logaritmica.

Considerazioni finali

La spirale logaritmica è comune in natura e fisica perché rappresenta una soluzione ottimale per problemi che coinvolgono crescita, dissipazione di energia o movimento con vincoli geometrici

